

POSTUPNOSTI, NEKONEČNÉ RADY

Príklad 1: Určte nasledujúci člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak $a_1 = 0,9$; $a_2 = 0,99$; $a_3 = 0,999$. Nájdite všeobecný predpis postupnosti a_n , tj. vyjadrite a_n explicitne.

Riešenie:

Keďže:

$$a_1 = 0,9$$

$$a_2 = 0,99$$

$$a_3 = 0,999$$

zrejme $a_4 = 0,9999$. Explicitne n -tý člen postupnosti:

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Príklad 2: Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1} + \cos(n\pi)$.

Riešenie:

Keďže $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, tak predpis a_n možno upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$a_n = (-1)^{n+1} + \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n(-1 + 1) = 0.$$

Z toho vyplýva, že všetky prvky tejto postupnosti sú nulové a teda:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Príklad 3: Upravte predpis postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{n+2}(\sum_{k=1}^n k) - \frac{n}{2}$.

Vypočítajte hodnotu a_n pre $n = 498$.

Riešenie:

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti $\{k\}_{k=1}^{\infty}$, tj. $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ je rovný:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z toho vyplýva, že:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \left(\frac{n+1}{n+2} - 1 \right) = \frac{n}{2} \left(\frac{n+1-n-2}{n+2} \right) = \frac{-n}{2(n+2)}$$

Preto:

$$a_{498} = \frac{-498}{2(498+2)} = \frac{-498}{1000} = -0,498.$$

Príklad 4: Nech $q \in \mathbb{R}$ je také, že $q \neq 1$. Ukážte, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ súčtov prvých n členov geometrickej postupnosti $\{q^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ má predpis $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Akú postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ súčtov prvých n členov geometrickej postupnosti dostaneme pre $q = 1$?

Riešenie:

Pre $q \neq 1$ má postupnosť súčtov geometrickej postupnosti $\{q^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ nasledujúce členy:

$$\begin{aligned}s_1 &= 1, \\s_2 &= 1 + q, \\s_3 &= 1 + q + q^2, \\&\vdots \\s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \\&\vdots\end{aligned}$$

Delením polynómov $q^n - 1$ a $q - 1$ pre $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ napr. Hornerovou schémou dostaneme:

1	1	0	...	0	-1
	1	1	...	1	1
	1	1	...	1	0

tj.:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1.$$

Skutočne teda pre $q \neq 1$ máme:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Pre $q = 1$ bude:

$$\begin{aligned}s_1 &= 1, \\s_2 &= 1 + 1 = 2, \\s_3 &= 1 + 1 + 1 = 3, \\&\vdots \\s_n &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}} = n, \\&\vdots\end{aligned}$$

Teda pre $q = 1$ bude postupnosťou súčtov prvých n členov geometrickej postupnosti aritmetická postupnosť, tj. $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 5: Ukážte z definície, že limita postupnosti z **príkladu 1** je rovná 1, tj. že platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1.$$

Riešenie:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné reálne číslo a $n_0 = \lceil -\log \varepsilon \rceil$ (tj. horná celá časť z $-\log \varepsilon$). Potom pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí:

$$n > n_0 = \lceil -\log \varepsilon \rceil \geq -\log \varepsilon = \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Po úprave:

$$10^n > 10^{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Odtiaľ:

$$\varepsilon > \frac{1}{10^n} = \left| \frac{1}{10^n} \right| = \left| -\left(\frac{1}{10}\right)^n \right| = \left| 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 \right| = \left| \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - 1 \right| = |a_n - a|.$$

Keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, tvrdenie je dokázané.

Príklad 6: Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:

a) $a_n = \frac{-n}{2n+4}$

Riešenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n\left(2 + \frac{4}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{-1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{4}{n}} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

b) $a_n = \frac{8-4^n}{7^{n-1}2^{n+1}}$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-4^n}{7^{n-1}2^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(2-4^{n-1})}{4(14^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{14^{n-1}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{14^{n-1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{14}\right)^{n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

c) $a_n = \sqrt{n^2+3n} - n$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+3n} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n} - n)(\sqrt{n^2+3n} + n)}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+3n) - n^2}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

d) $a_n = 5 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} &= 5 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\right) \\ &= 5 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(2 \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\right) \\ &= 5(1+0)^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\right) = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{5}{2 \cos 0} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{1-3n}$

Riešenie:

Pri výpočte využijeme znalosť limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Počítajme:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{1-3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{(1-3n)\frac{4n}{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\frac{1-3n}{4n}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{4n}} = e^{-3/4} \end{aligned}$$

Príklad 7: Nájdite súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - e^{-n+1}$$

Riešenie:

Označme $a_n = e^{-n} - e^{-n+1}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, ak má konečný súčet, tzn. ak postupnosť čiastočných súčtov radu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. Nájdime n -tý čiastočný súčet radu:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = e^{-1} - e^0 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} = e^{-2} - e^0 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} + e^{-3} - e^{-2} = e^{-3} - e^0 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} + \dots + e^{-n} - e^{-n+1} = e^{-n} - e^0 \end{aligned}$$

Teda $s_n = e^{-n} - e^0$, čo vieme ukázať matematickou indukciou.

Platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} - e^0 = 0 - 1 = -1$$

Súčet radu je teda rovný -1 .

Príklad 8: Nájdite súčet geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, ak $a \in \mathbb{R}$ a kvocient $q \in \mathbb{R}$ je taký, že $|q| < 1$.

Riešenie:

Označme $a_n = aq^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nájdime n -tý čiastočný súčet radu, pomôžeme si závermi z príkladu 4:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = aq^0 = a \\ s_2 &= a_1 + a_2 = a + aq = a(1 + q) \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2) \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teda $s_n = a \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ a platí:

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} q^n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{a}{1 - q} - 0 = \frac{a}{1 - q}$
 Súčet geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ s kvocientom $|q| < 1$ je rovný $\frac{a}{1-q}$.

Príklad 9: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$.

Riešenie:

Rad je geometrický s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ takým, že $|q| < 1$. Ukážeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^2 4^{n-1}}{5^{n-1} 5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{5} \frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}$$

Teda máme geometrický rad s $a = \frac{16}{5}$ a $q = \frac{4}{5}$. Podľa **príkladu 8** potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} = \frac{\frac{16}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{5-4}{5}} = 16$$

Súčet tohto radu je teda rovný 16.

Príklad 10: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}}$.

Riešenie:

Rad je geometrický s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ takým, že $|q| < 1$. Ukážeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^4(-1)^{n-1}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

Máme teda geometrický rad s $a = 3$ a $q = -\frac{1}{6}$. Podľa **príkladu 8** potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} = \frac{3}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{18}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{18}{7}$$

Súčet tohto radu je teda rovný $\frac{18}{7}$.

Príklad 11: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+2^n}{3^{n+1}}$.

Riešenie:

Na nájdenie súčtu tohto radu využijeme tvrdenie:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3^2 3^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} 2}{3^2 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$ je geometrický rad s $a = \frac{7}{9}$ a $q = \frac{1}{3}$ a má súčet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{7}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ je geometrický rad s $a = \frac{2}{9}$ a $q = \frac{2}{3}$ a má súčet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Celkovo teda dostávame:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{7}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6}$$

Príklad 12: Nájdite súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n-1}$$

Riešenie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n-1}$ nie je konvergentný, pretože nespĺňa nutnú podmienku konverencie:

Ak nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Vypočítajme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n-1}$ je divergentný.

Poznámka:

Opačná implikácia k nutnej podmienke konverencie vo všeobecnosti neplatí, tzn.: ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to ešte neznamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Ďalšia literatúra k cvičeniu, z ktorej môžete čerpať, sa nachádza na stránke predmetu:

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC>

Ide o súbor:

1. Riesene_priklady11-12.pdf

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC?action=AttachFile&do=get&target=Riesene_priklady11-12.pdf

Konkrétne si prejdite: **1.-8.príklad.**

Domáca úloha

DÚ: Vyjadrite explicitne n -tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takej, že $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$, kde $a_1 = \frac{1}{2}$.
Určte hodnotu a_n pre $n = 999$. Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Komentár: Úloha je za 1 prémiový bod, ktorý získajú prví pätnásť riešitelia, ktorí úlohu celú správne vyriešia. Riešenia **zasielajte výhradne** z vášho **univerzitného webmailu** alebo **stuba-gmailu** na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk do piatku 27.11.2020, do 13:00, vo formáte pdf, jpg, jpeg alebo png. V prípade, že prvých pätnásť správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 27.11.2020 o 13:00, mailom budete upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí pätnásteho správneho riešenia. Aby nedochádzalo k duplicitám, každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta (**meno, priezvisko - uveďte čitateľne na každej strane riešenia spolu s vašim podpisom**).