

MONOTÓNNOSŤ, PÁRNOSŤ/NEPÁRNOSŤ, OHRANIČENOSŤ, PERIODICKOSŤ A LIMITA FUNKCIE

Monotónnosť funkcií:

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia reálnej premennej. Funkciu f nazývame:

- **rastúca**, ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- **klesajúca**, ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- **neklesajúca**, ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **nerastúca**, ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Príklad 1: Nájdite definičný obor a vyšetrite monotónnosť funkcie f na jej definičnom obore, ak:

a) $f(x) = 3x - 1$

Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Ukážeme, že je na $\mathbb{R}$ rastúca. Nech $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} 3x_1 &< 3x_2, \\ f(x_1) = 3x_1 - 1 &< 3x_2 - 1 = f(x_2). \end{aligned}$$

b) $f(x) = 1 - 3x$

Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Ukážeme, že je na $\mathbb{R}$ klesajúca. Nech $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} 3x_1 &< 3x_2, \\ -3x_1 &> -3x_2, \\ f(x_1) = 1 - 3x_1 &> 1 - 3x_2 = f(x_2). \end{aligned}$$

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Ukážeme, že je na $\mathbb{R}$ neklesajúca. Nech $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -1 = f(x_2), \text{ ak } x_2 < 0; \\ f(x_1) &= -1 < 0 = f(x_2), \text{ ak } x_2 = 0; \\ f(x_1) &\leq 1 = f(x_2), \text{ ak } x_2 > 0. \end{aligned}$$

d) $f(x) = -7$

Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Je konštantná a teda nerastúca, ale aj neklesajúca na $\mathbb{R}$. Jej monotónnosť vyplýva z toho, že pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) = -7 = f(x_2)$.

e) $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

Pretože nie je možné deliť nulou, tak, aby $f(x)$ mal zmysel, do $D(f)$ budú patriť všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je výraz v menovateli rôzny od nuly. Také x je jediné: $x = \frac{1}{3}$, a preto bude $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. Ukážeme, že funkcia je klesajúca na $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ aj na $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, ale nie na svojom definičnom obore.

Predpokladajme najprv, že $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2 < \frac{1}{3}$, potom:

$$\begin{aligned} 3x_1 &< 3x_2 < 1, \\ 3x_1 - 1 &< 3x_2 - 1 < 0, \\ \frac{1}{3x_2 - 1} &< \frac{1}{3x_1 - 1} < 0, \\ f(x_2) = \frac{2}{3x_2 - 1} &< \frac{2}{3x_1 - 1} = f(x_1). \end{aligned}$$

Nech teraz $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $\frac{1}{3} < x_1 < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} 1 &< 3x_1 < 3x_2, \\ 0 &< 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1, \\ 0 &< \frac{1}{3x_2 - 1} < \frac{1}{3x_1 - 1}, \\ f(x_2) = \frac{2}{3x_2 - 1} &< \frac{2}{3x_1 - 1} = f(x_1). \end{aligned}$$

Tým sme ukázali prvú časť tvrdenia.

Ďalej nech $x_1, x_2 \in D(f)$ sú také, že $x_1 < \frac{1}{3} < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} 3x_1 &< 1 < 3x_2, \\ 3x_1 - 1 &< 0 < 3x_2 - 1, \\ \frac{1}{3x_2 - 1} &> 0 > \frac{1}{3x_1 - 1}, \\ f(x_2) = \frac{2}{3x_2 - 1} &> 0 > \frac{2}{3x_1 - 1} = f(x_1). \end{aligned}$$

Tým sme ukázali druhú časť tvrdenia a môžeme prehlásiť, že f nie je monotónna na svojom definičnom obore.

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$

Aby $f(x)$ mal zmysel, musí súčasne platiť:

$$\frac{1-x}{x+1} > 0 \text{ a } x+1 \neq 0.$$

To je splnené, ak $1-x > 0$ a súčasne $x+1 > 0$ alebo $1-x < 0$ a súčasne $x+1 < 0$. Keďže druhú časť podmienky nemožno splniť pre žiadne x , tak $D(f) = (-1, 1)$. Ukážeme, že funkcia je na svojom definičnom obore klesajúca. Za tým účelom upravme najprv predpis funkcie:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \ln\left(-\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(-\frac{x+1-2}{x+1}\right) = \ln\left(-1 + \frac{2}{x+1}\right).$$

Nech $x_1, x_2 \in D(f)$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2$, potom:

$$\begin{aligned} 0 &< x_1 + 1 < x_2 + 1, \\ 0 &< \frac{2}{x_2 + 1} < \frac{2}{x_1 + 1}, \end{aligned}$$

$$-1 + \frac{2}{x_2 + 1} < -1 + \frac{2}{x_1 + 1}.$$

Pretože funkcia $\ln x$ je rastúca, tak máme:

$$f(x_2) = \ln\left(-1 + \frac{2}{x_2 + 1}\right) < \ln\left(-1 + \frac{2}{x_1 + 1}\right) = f(x_1).$$

Príklad 2: Ukážte, že rastúca alebo klesajúca funkcia je injektívna.

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je rastúca funkcia, tj. pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Vezmime $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$. Potom buď $x_1 < x_2$ alebo $x_2 < x_1$. Ak $x_1 < x_2$, z toho, že funkcia f je rastúca, vyplýva $f(x_1) < f(x_2)$. Ak $x_2 < x_1$, z toho, že funkcia f je rastúca, vyplýva $f(x_2) < f(x_1)$. V oboch prípadoch platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. Teda funkcia f je injektívna.

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je klesajúca funkcia, tj. pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Vezmime $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$. Potom buď $x_1 < x_2$ alebo $x_2 < x_1$. Ak $x_1 < x_2$, z toho, že funkcia f je klesajúca, vyplýva $f(x_1) > f(x_2)$. Ak $x_2 < x_1$, z toho, že funkcia f je klesajúca, vyplýva $f(x_2) > f(x_1)$. V oboch prípadoch platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. Teda funkcia f je injektívna.

Párnosť, nepárnosť funkcií:

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia reálnej premennej. Funkciu f nazývame:

- **párna**, ak pre každé $x \in A$ platí: $-x \in A$ a súčasne $f(-x) = f(x)$;
- **nepárna**, ak pre každé $x \in A$ platí: $-x \in A$ a súčasne $f(-x) = -f(x)$.

Príklad 3: Nájdite definičný obor a určte, či je funkcia f párna, nepárna, ak:

a) $f(x) = x^4 + 1$

Predpis funkcie $x^4 + 1$ je definovaný pre všetky reálne x , preto $D(f) = \mathbb{R}$. Keďže $D(f) = \mathbb{R}$, tak je súmerný podľa počiatku, tzn. ak $x \in \mathbb{R}$, tak aj $-x \in \mathbb{R}$. Funkcia je párna, pretože pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x).$$

Nie je nepárna, pretože existuje dvojica reálnych čísel $x, -x \in \mathbb{R}$ taká, že $f(-x) \neq -f(x)$. Napr. $f(-1) = (-1)^4 + 1 = 1 + 1 = 2 \neq -2 = -(1^4 + 1) = -f(1)$.

b) $f(x) = x^3$

Predpis funkcie x^3 je definovaný pre všetky reálne x , preto $D(f) = \mathbb{R}$. Keďže $D(f) = \mathbb{R}$, tak je súmerný podľa počiatku. Funkcia je nepárna, pretože pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Nie je párna, pretože existuje dvojica reálnych čísel $x, -x \in \mathbb{R}$ taká, že $f(-x) \neq f(x)$. Napr. $f(-1) = (-1)^3 = -1 \neq 1 = 1^3 = f(1)$.

c) $f(x) = |x^3|$

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že $D(f) = \mathbb{R}$. Hoci funkcia x^3 je nepárna, funkcia $f(x) = |x^3|$ je párna, pretože pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(-x) = |(-x)^3| = |-x^3| = |x^3| = f(x).$$

Nie je nepárna, pretože existuje dvojica reálnych čísel $x, -x \in \mathbb{R}$ taká, že $f(-x) \neq -f(x)$.
Např. $f(-1) = |(-1)^3| = |-1| = 1 = |1^3| \neq -|1^3| = -f(1)$.

d) $f(x) = 0$

Konštantná nulová funkcia je definovaná pre akékoľvek reálne číslo, preto $D(f) = \mathbb{R}$. Keďže $D(f) = \mathbb{R}$, tak je súmerný podľa počiatku. Navyše pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(-x) = 0 = f(x) = -f(x).$$

To znamená, že funkcia je párna aj nepárna na svojom definičnom obore.

e) $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

Z **príkladu 1e)** máme $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. $D(f)$ nie je súmerný podľa počiatku, pretože hoci $-\frac{1}{3} \in D(f)$, tak $-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \notin D(f)$. Z toho vyplýva, že funkcia nie je párna, ani nepárna.

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$

Z **príkladu 1f)** máme $D(f) = (-1, 1)$, čo je definičný obor súmerný podľa počiatku. Navyše pre každé $x \in (-1, 1)$ platí:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{(-x)+1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = -f(x).$$

Funkcia f je teda nepárna. Nie je párna, pretože existuje dvojica reálnych čísel $x, -x \in D(f)$ taká, že $f(-x) \neq f(x)$. Např.:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right) = \ln 2 \neq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ohraničenosť funkcie:

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia reálnej premennej. Funkciu f nazývame:

- **ohraničená zhora**, ak existuje konečné reálne číslo M také, že pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \leq M$;
- **ohraničená zdola**, ak existuje konečné reálne číslo m také, že pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \geq m$;
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora aj zdola.

Príklad 4: Nájdite horné a dolné ohraničenie funkcie f na intervale A , ak:

a) $f(x) = \frac{2}{x+2}$; $A = (-2, \infty)$

Funkcia f je na A dobre definovaná a na A nadobúda iba kladné hodnoty, pretože $x+2 > 0$. Z toho bezprostredne vyplýva:

$$0 < \frac{2}{x+2} = f(x)$$

pre každé $x \in A$. Teda $m = 0$ je dolné ohraničenie funkcie f na A . Presnejšie je to najväčšie z dolných ohraničení.

Funkcia f nemá horné ohraničenie. Ukážeme sporom. Nech by existovalo také konečné reálne číslo M , že v pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \leq M$. Potom určite $M > 0$. Nech $x_0 \in A$ je také, že $-2 < x_0 < -2 + \frac{2}{M}$. Pretože $M > 0$, také $x_0 \in A$ určite existuje.

Upravme $-2 < x_0 < -2 + \frac{2}{M}$, dostaneme:

$$0 < x_0 + 2 < \frac{2}{M},$$

$$M < \frac{2}{x_0 + 2} = f(x_0),$$

čo je spor s predpokladom, že pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \leq M$. Je teda možné pre akékoľvek veľké M vybrať $x_0 \in A$ dostatočne blízke číslu -2 tak, aby $f(x_0) > M$.

b) $f(x) = \frac{2}{3x-1}; A = \langle 1, 3 \rangle$

Funkcia f je na A dobre definovaná. Z **príkladu 1e)** vieme, že funkcia je klesajúca na intervale $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ a teda klesajúca i na $A \subseteq \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. Z toho vyplýva, že najväčšia funkčná hodnota, ktorú môže funkcia f na A dosiahnuť, sa dosahuje v bode 1 a $f(1) = \frac{2}{3-1} = 1$. Najmenšiu funkčnú hodnotu, ktorú funkcia f na A dosahuje, dosahuje v bode 3 a $f(3) = \frac{2}{9-1} = \frac{1}{4}$. Všetky ostatné hodnoty funkcie f ležia medzi hodnotami $\frac{1}{4}$ a 1. Máme:

$$\frac{1}{4} = f(3) \leq f(x) \leq f(1) = 1$$

pre každé $x \in A$. Funkcia f je teda na A ohraničená, má dolné $m = \frac{1}{4}$ aj horné ohraničenie $M = 1$. Keďže najväčšia aj najmenšia funkčná hodnota sa dosahuje v nejakom bode z definičného oboru funkcie f , M je maximum funkcie f na A a m je minimum funkcie f na A .

Poznámka:

Za horné ohraničenie by sme v tomto prípade mohli zvoliť akékoľvek konečné reálne číslo väčšie alebo rovné 1, ale maximum funkcie f na A je iba hodnota 1. Podobne za dolné ohraničenie by sme v tomto prípade mohli zvoliť akékoľvek konečné reálne číslo menšie alebo rovné $\frac{1}{4}$, ale minimum funkcie f na A je iba hodnota $\frac{1}{4}$.

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}; A = (-4, 7)$

Funkcia f je na A dobre definovaná, pretože pre každé $x \in A$ je $x + 4 \neq 0$. Dá sa ukázať, že funkcia je rastúca na intervale A . Za tým účelom upravme najprv predpis funkcie:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+4} = 2 \frac{x-\frac{3}{2}}{x+4} = 2 \frac{x+4-\frac{11}{2}}{x+4} = 2 - \frac{11}{x+4}.$$

Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovoľné, také, že $-4 < x_1 < x_2 \leq 7$. Potom:

$$0 < x_1 + 4 < x_2 + 4 \leq 11,$$

$$1 \leq \frac{11}{x_2 + 4} < \frac{11}{x_1 + 4},$$

$$-1 \geq \frac{-11}{x_2 + 4} > \frac{-11}{x_1 + 4},$$

$$1 \geq 2 - \frac{11}{x_2 + 4} > 2 - \frac{11}{x_1 + 4},$$

$$f(x_1) < f(x_2) \leq 1.$$

Ukázali sme, že funkcia f je na A rastúca a navyše, že na A nadobúda najväčšiu hodnotu v bode 7, rovnú $f(7) = 1$. Našli sme teda maximum funkcie f na A a teda aj najmenšie horné ohraňenie tejto funkcie na intervale A .

Dolné ohraňenie funkcia f na A nemá. Ukážeme sporom. Nech by existovalo také konečné reálne číslo m , že v pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \geq m$. Potom určite $m < 1$. Nech $x_0 \in A$ je také, že $-4 < x_0 < -4 + \frac{11}{2-m}$. Pretože $m < 1$, také $x_0 \in A$ určite existuje.

Upravme $-4 < x_0 < -4 + \frac{11}{2-m}$, dostaneme:

$$0 < x_0 + 4 < \frac{11}{2-m},$$

$$2-m < \frac{11}{x_0 + 4},$$

$$m > 2 - \frac{11}{x_0 + 4} = f(x_0),$$

čo je spor s predpokladom, že pre každé $x \in A$ platí: $f(x) \geq m$. Je teda možné pre akékoľvek malé m vybrať $x_0 \in A$ dostatočne blízke číslu -4 tak, aby $f(x_0) < m$.

Periodické funkcie:

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia reálnej premennej. Funkciu f nazývame **periodickou s periódou** $T \neq 0$, ak platí:

- pre každé $x \in A$: $x + T \in A$,
- pre každé $x \in A$: $f(x + T) = f(x)$.

Príklad 5: Zistite, či f je periodická, ak:

a) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Funkcia tangens je definovaná na celom $\mathbb{R}$ s výnimkou bodov $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkcia kosínus je definovaná na celom $\mathbb{R}$. Takže máme $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Tangens je periodická funkcia s periódou π , rovnako tak $\cos 2x$ je π -periodická funkcia (nič na tom nemení ani prípočet $\frac{\pi}{3}$ v jeho argumente). Preto f je periodická funkcia s (najmenšou) periódou π .

Ukážeme:

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \operatorname{tg}(x + \pi) + \cos\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \\ &= \frac{-\sin x}{-\cos x} + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x). \end{aligned}$$

b) $f(x) = \sin 2x - 2 \cos 3x + 1$

Definičný obor funkcie f sú zrejme všetky reálne čísla, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Funkcia $\sin 2x$ je periodická s periódou π , kým funkcia $\cos 3x$ je periodická s periódou $\frac{2}{3}\pi$. Perióda funkcie f musí byť teda 2π . Že to tak je, si uvedomíme, ak zvolíme nejaké $x_0 \in \mathbb{R}$ a vypočítame jeho funkčnú hodnotu $f(x_0) = \sin 2x_0 - 2 \cos 3x_0 + 1$. Funkčná hodnota funkcie $\cos 3x$ bude síce v bode $x_0 + \frac{2}{3}\pi$ aj v bode $x_0 + \frac{4}{3}\pi$ rovnaká ako v bode x_0 , nie však funkčná hodnota funkcie $\sin 2x$. Máme teda $f\left(x_0 + \frac{2}{3}\pi\right) \neq f(x_0)$, resp. $f\left(x_0 + \frac{4}{3}\pi\right) \neq f(x_0)$. Podobne, ak sa pozrieme na funkčné hodnoty funkcií $\sin 2x$ a $\cos 3x$ v bode $x_0 + \pi$, tak hoci hodnota $\sin 2x$ je rovnaká ako v bode x_0 , pri funkcii $\cos 3x$ to už neplatí. Na to, aby sme dosiahli rovnakú hodnotu oboch funkcií, musíme k x_0 pripočítať 2π . Tým dostaneme aj rovnakú funkčnú hodnotu funkcie f (súčet násobkov funkcií, ani prípočet konštanty k tomuto súčtu to nijak nezmení). Ukážeme:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(2(x + 2\pi)) - 2 \cos(3(x + 2\pi)) + 1 \\ &= \sin(2x + 4\pi) - 2 \cos(3x + 6\pi) + 1 = \sin 2x - 2 \cos 3x + 1 = f(x). \end{aligned}$$

c) $f(x) = \begin{cases} x - 4k, & x \in \langle -1 + 4k, 1 + 4k \rangle, k \in \mathbb{Z}; \\ 4k + 2 - x, & x \in \langle 1 + 4k, 3 + 4k \rangle, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Definičný obor funkcie f sú zrejme všetky reálne čísla, tj. $D(f) = \mathbb{R}$, pretože f je dobre definovaná pre každý z intervalov $\langle -1 + 4k, 1 + 4k \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, resp. $\langle 1 + 4k, 3 + 4k \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, dĺžky 2. Na intervaloch $\langle -1 + 4k, 1 + 4k \rangle$ je funkcia f rastúca, kým na intervaloch $\langle 1 + 4k, 3 + 4k \rangle$ klesajúca, pričom funkčné hodnoty sú v krajných bodoch na seba nadväzujúcich intervalov rovnaké, napr. $f(-3) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(3) = -1$ atď. Vzhľadom k tomu je možné predpokladať, že funkcia je periodická s periódou rovnou 4. Ukážeme, že to tak naozaj je.

Vezmime $x_0 \in \langle -1 + 4k_0, 1 + 4k_0 \rangle$ pre nejaké $k_0 \in \mathbb{Z}$, potom $x_0 + 4$ leží v intervale $\langle -1 + 4(k_0 + 1), 1 + 4(k_0 + 1) \rangle = \langle 3 + 4k_0, 5 + 4k_0 \rangle$ a platí:

$$f(x_0 + 4) = (x_0 + 4) - 4(k_0 + 1) = x_0 - 4k_0 = f(x_0).$$

Vezmime teraz $x_0 \in \langle 1 + 4k_0, 3 + 4k_0 \rangle$ pre nejaké $k_0 \in \mathbb{Z}$, potom $x_0 + 4$ leží v intervale $\langle 1 + 4(k_0 + 1), 3 + 4(k_0 + 1) \rangle = \langle 5 + 4k_0, 7 + 4k_0 \rangle$ a platí:

$$f(x_0 + 4) = 4(k_0 + 1) + 2 - (x_0 + 4) = 4k_0 + 2 - x_0 = f(x_0).$$

Poznamenajme, že výber x_0 aj $k_0 \in \mathbb{Z}$ bol ľubovoľný, preto môžeme uvedené zovšeobecniť pre akýkoľvek bod x z definičného oboru funkcie f .

Definície:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ - rozšírená reálna os.

Okolie bodu: Nech $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$.

- Množina $O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sa nazýva **ε -ové okolie bodu a** .
- Množina $O_\varepsilon^\circ(a) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ sa nazýva **prstencové ε -ové okolie bodu a** .
- Množina $O_\varepsilon(\infty) = O_\varepsilon^\circ(\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{\varepsilon}\right\} = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ sa nazýva **ε -ové okolie bodu ∞** .
- Množina $O_\varepsilon(-\infty) = O_\varepsilon^\circ(-\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}; x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ sa nazýva **ε -ové okolie bodu $-\infty$** .

Hromadný bod:

Nech $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva **hromadný bod množiny A** , ak pre každé okolie $O_\varepsilon^\circ(a)$ platí: $O_\varepsilon^\circ(a) \cap A \neq \emptyset$.

Limita funkcie:

Nech $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny A . Hovoríme, že **funkcia f má v bode a limitu $b \in \mathbb{R}^*$** , píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje $O_\delta^\circ(a)$ také, že platí: $f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(b)$.

Príklad 6: Ukážte z definície, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

a) $f(x) = x, a = 3, b = 3$

Platí $D(f) = \mathbb{R}$. Bod $a = 3 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon^\circ(a)$ platí: $O_\varepsilon^\circ(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$ spĺňajúce $|x - 3| < \delta$ platí: $|f(x) - 3| = |x - 3| < \varepsilon$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, vezmeme $0 < \delta \leq \varepsilon$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$ spĺňajúce $|x - 3| < \delta$ platí: $|f(x) - 3| = |x - 3| < \delta \leq \varepsilon$.

b) $f(x) = x, a \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné, $b = a$

Platí $D(f) = \mathbb{R}$. Ak $a \in \mathbb{R}$, potom a je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon^\circ(a)$ platí: $O_\varepsilon^\circ(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow a} x = b = a$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}, x \neq a$ spĺňajúce $|x - a| < \delta$ platí: $|f(x) - b| = |x - a| < \varepsilon$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, vezmeme $0 < \delta \leq \varepsilon$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}, x \neq a$ spĺňajúce $|x - a| < \delta$ platí: $|f(x) - b| = |x - a| < \delta \leq \varepsilon$.

c) $f(x) = \sqrt{x}, a = 3, b = \sqrt{3}$

Platí $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$. Bod $a = 3 \in D(f)$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon^\circ(a)$ platí: $O_\varepsilon^\circ(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \langle 0, \infty \rangle$, $x \neq 3$ spĺňajúce $|x - 3| < \delta$ platí: $|f(x) - \sqrt{3}| = |\sqrt{x} - \sqrt{3}| < \varepsilon$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, vezmeme $0 < \delta \leq \sqrt{3}\varepsilon$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$ spĺňajúce $|x - 3| < \delta$ platí: $|f(x) - \sqrt{3}| = |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = \left| \frac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \leq \frac{|x-3|}{\sqrt{3}} < \frac{\delta}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{\sqrt{3}} = \varepsilon$.

d) $f(x) = 2^x$, $a = -\infty$, $b = 0$

Platí $D(f) = \mathbb{R}$. Bod $a = -\infty \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon(a)$ platí: $O_\varepsilon(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $x < -\frac{1}{\delta}$ platí: $|f(x) - 0| = |2^x| < \varepsilon$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Pre $\varepsilon \geq 1$ je tvrdenie automaticky splnené, pretože pre $x < -\frac{1}{\delta} < 0$ je $|f(x)| = f(x) = 2^x < 1$. Predpokladajme preto, že $\varepsilon < 1$.

Vezmeme $0 < \delta \leq \frac{-1}{\log_2 \varepsilon}$. Čiže $0 > \log_2 \varepsilon \geq \frac{-1}{\delta}$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $x < -\frac{1}{\delta}$ platí: $|f(x) - 0| = |2^x| = 2^x < 2^{-\frac{1}{\delta}} \leq 2^{\log_2 \varepsilon} = \varepsilon$, kde sme využili, že funkcia f je na celom $\mathbb{R}$ rastúca.

e) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $a = \infty$, $b = 1$

Platí $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bod $a = \infty \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon(a)$ platí: $O_\varepsilon(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $x > \frac{1}{\delta}$ platí: $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Vezmeme $0 < \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $x > \frac{1}{\delta}$ platí: $|f(x) - 1| = \left| 1 + \frac{1}{x^2} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} < \delta^2 \leq \varepsilon$.

f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 0$, $b = \infty$

Platí $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bod $a = 0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f , pretože pre každé okolie $O_\varepsilon(a)$ platí: $O_\varepsilon(a) \cap D(f) \neq \emptyset$.

To, že má byť $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ spĺňajúce $|x| < \delta$ platí: $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Ukážeme, že je to pravda.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Vezmeme $0 < \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ spĺňajúce $|x| < \delta$ platí: $f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq \frac{1}{\varepsilon}$.