

REÁLNA FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ

Definícia:

Nech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny. Reálnou funkciou f reálnej premennej x rozumieme pravidlo, ktoré každému prvku $x \in A$ priradí práve jeden prvok $y \in B$. Zapišeme $y = f(x)$. Funkcia je zobrazenie, zobrazuje množinu A do množiny B . Zapišeme $f: A \rightarrow B$ (f zobrazuje A do B). Množinu A nazývame definičný obor funkcie f a zapisujeme aj $D(f)$, teda $A = D(f)$. Množinu B nazývame koobor. Prvok $x \in A$ nazývame vzor, prvok $y = f(x) \in B$ nazývame obraz alebo hodnota funkcie f v bode x . Množinu všetkých hodnôt funkcie f nazývame obor hodnôt funkcie f a značíme $H(f)$. Teda $H(f) = \{y \in B \mid y = f(x); x \in A\} \subseteq B$.

Príklad 1: Nájdite definičný obor funkcie f , ak:

a) $f(x) = 3x - 5$

Nájsť definičný obor funkcie f , ktorej predpis je $f(x)$, znamená určiť všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel. V tomto prípade má výraz $3x - 5$ zmysel pre akékoľvek reálne x , tj. $D(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{2}{3x-5}$

Pretože nie je možné deliť nulou, tak, aby $f(x)$ mal zmysel, do $D(f)$ budú patriť všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je výraz v menovateli rôzny od nuly. Také x je jediné: $x = \frac{5}{3}$, a preto bude $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$.

c) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$

Aby bola hodnota funkcie reálna, pod odmocninou nesmie ležať záporné číslo. Musí byť teda splnené:

$$2x^2 - 3 \geq 0.$$

Z toho úpravami získame:

$$2x^2 \geq 3,$$

$$x^2 \geq \frac{3}{2},$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$|x| \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

To je pravda pre $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Zapišeme $D(f) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$.

d) $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{4-x^2}}$

Aby $f(x)$ mal zmysel, musí súčasne platiť:

$$\sqrt{4-x^2} \neq 0 \text{ a } 4-x^2 \geq 0.$$

To je splnené pre všetky $x \in \mathbb{R}$ také, že $4-x^2 > 0$, pretože odmocnina je rovná nule vtedy a len vtedy, keď sa odmocňuje nula. Z toho úpravami dostaneme:

$$4-x^2 > 0, \\ x^2 < 4,$$

$$|x| < \sqrt{4} = 2.$$

Keďže žiadne ďalšie obmedzujúce podmienky x spĺňať nemusí, máme $D(f) = (-2,2)$.

e) $f(x) = \sqrt{|4-x^2|}$

Výraz $4-x^2$ je definovaný pre akékoľvek reálne x . Navyše absolútna hodnota z akéhokoľvek čísla je väčšia alebo rovná nule, preto je funkcia f definovaná na celej množine reálnych čísel, tj.: $D(f) = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \sqrt{1-|4-x^2|}$

V tomto prípade musí byť splnené:

$$1-|4-x^2| \geq 0.$$

Z toho úpravami získame:

$$|4-x^2| \leq 1, \\ -1 \leq 4-x^2 \leq 1, \\ 3 \leq x^2 \leq 5.$$

To možno splniť iba pre x z množiny $\langle -\sqrt{5}, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}, \sqrt{5} \rangle$. Máme teda $D(f) = \langle -\sqrt{5}, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}, \sqrt{5} \rangle$.

g) $f(x) = e^{4-x^2}$

Exponenciálna funkcia je definovaná na celej množine reálnych čísel a rovnako tak aj $4-x^2$, preto $D(f) = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = \ln(4-x^2)$

Argument logaritmickej funkcie musí byť kladné číslo. Z toho vyplýva:

$$4-x^2 > 0$$

a teda $D(f) = (-2,2)$ (viď. **Príklad 1d**).

i) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4x-5)}$

Aby $f(x)$ mal zmysel, musí súčasne platiť:

$$4x-5 > 0 \text{ a } \log_{\frac{1}{2}}(4x-5) \geq 0.$$

Z nerovnice $4x - 5 > 0$ získame $x > \frac{5}{4}$. Pretože logaritmus so základom z intervalu $(0,1)$ nadobúda nezáporné hodnoty iba pre argument z intervalu $(0, 1)$, tak z nerovnice $\log_{\frac{1}{2}}(4x - 5) \geq 0$ úpravami dostaneme:

$$0 < 4x - 5 \leq 1,$$

$$5 < 4x \leq 6,$$

$$\frac{5}{4} < x \leq \frac{3}{2}.$$

Celkovo teda máme $D(f) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

$$\textbf{j)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - \log_2(4x - 5)}}$$

Aby $f(x)$ mal zmysel, musí súčasne platiť:

$$4x - 5 > 0 \text{ a } 3 - \log_2(4x - 5) > 0.$$

Z nerovnice $4x - 5 > 0$ máme $x > \frac{5}{4}$. Z nerovnice $3 - \log_2(4x - 5) > 0$ úpravami získame:

$$\log_2(4x - 5) < 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8,$$

$$4x - 5 < 8,$$

$$x < \frac{13}{4},$$

kde sme využili, že logaritmus so základom väčším ako jedna je rastúca funkcia. Keďže musí súčasne platiť, že $x > \frac{5}{4}$, $x < \frac{13}{4}$, tak máme $D(f) = \left(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$.

$$\textbf{k)} \quad f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Výraz $x + \frac{\pi}{2}$ je definovaný pre akékoľvek reálne x a funkcia sínus je definovaná na celom $\mathbb{R}$, takže $D(f) = \mathbb{R}$.

$$\textbf{l)} \quad f(x) = \frac{1}{\cos 3x}$$

Aby sme nedelili nulou, výraz v menovateli musí byť rôzny od nuly. Teda v definičnom obore funkcie f budú ležať všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré $\cos 3x \neq 0$. Za tým účelom nájdeme najprv všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré $\cos 3x = 0$, aby sme ich mohli z $D(f)$ potom vylúčiť.

Funkcia kosínus nadobúda nulové hodnoty v bodoch $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Musíme teda hľadať také $x \in \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

čiže $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Preto $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}\right)$.

$$\textbf{m)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}}$$

Výraz $f(x)$ bude mať zmysel len pre tie hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré nadobúda funkcia sínus v menovateli pod odmocninou kladné hodnoty. Funkcia sínus nadobúda kladné hodnoty pre argument z intervalov $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Preto musí platiť:

$$2k\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \pi + 2k\pi.$$

Odtiaľ úpravami získame:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi. \end{aligned}$$

Zapišeme $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi \right)$.

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$

V tomto prípade musí byť súčasne splnených viacero podmienok:

$$x + 2 \neq 0, \quad \frac{x-2}{x+2} \geq 0, \quad 1+x > 0, \quad \frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \geq 0.$$

Platí:

$$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2, \tag{1}$$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2 \geq 0 \text{ a súčasne } x+2 > 0) \text{ alebo } (x-2 \leq 0 \text{ a súčasne } x+2 < 0) \tag{2}$$

$$1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1, \tag{3}$$

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1. \tag{4}$$

Podmienka (1) sa nachádza v (2) a preto sa ňou v ďalšom už nebudeme priamo zaoberať. Z (2) máme:

$$x \geq 2 \text{ alebo } x < -2,$$

teda $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 2, \infty)$. Z podmienok (3) a (4) máme:

$$-1 < x \leq 1,$$

teda $x \in (-1, 1)$. Prienikom množín $(-\infty, -2) \cup \langle 2, \infty)$ a $(-1, 1)$ je prázdna množina, čiže $D(f) = \emptyset$ a funkcia f nie je nikde definovaná.

Príklad 2: Nájdite definičný obor a obor funkčných hodnôt funkcie f , ak:

a) $f(x) = x^3 + 1$

Predpis funkcie $x^3 + 1$ je kubický polynóm, ktorý je definovaný pre všetky reálne x , preto $D(f) = \mathbb{R}$ a nadobúda všetky hodnoty z $\mathbb{R}$, čiže aj $H(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Predpis funkcie $x^2 - 4x + 4$ je kvadratický polynóm, ktorý je definovaný pre všetky reálne x , preto $D(f) = \mathbb{R}$. Predpis funkcie možno upraviť na štvorec:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Hodnota $(x-2)^2$ je najmenšia, keď $x = 2$. V tomto prípade platí $f(2) = 0$. Navyše $(x-2)^2 \geq 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ a čím je rozdiel $|x-2|$ väčší, tým väčšia je hodnota funkcie, preto $H(f) = \langle 0, \infty)$.

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Pod odmocninou nemôže ležať záporné číslo, preto musí byť splnené:

$$9 - x^2 \geq 0,$$

$$x^2 \leq 9,$$

$$|x| \leq \sqrt{9} = 3.$$

Z toho vyplýva, že $D(f) = \langle -3, 3 \rangle$. V krajných bodoch tohto intervalu dosahuje funkcia najmenšiu hodnotu rovnú 0. Pre všetky $x \in (-3, 3)$ je $f(x) > 0$. Pretože $x^2 \geq 0$ pre akékoľvek x , tak $9 - x^2$ je maximálne, ak x^2 je minimálne, teda rovné 0. To je splnené iba pre $x = 0$. Preto sa maximálna funkčná hodnota dosahuje v bode 0 a je rovná $\sqrt{9} = 3$. Z toho: $H(f) = \langle 0, 3 \rangle$.

d) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}}$

Pod odmocninou nemôže ležať záporné číslo, preto musí byť splnené:

$$1 - x \geq 0 \text{ a súčasne } x \geq 0.$$

To platí pre $0 \leq x \leq 1$, preto $D(f) = \langle 0, 1 \rangle$. Aby sme našli obor hodnôt funkcie f , upravme najprv jej predpis:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{1-\sqrt{x}}.$$

Vezmúc $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je hodnota $1 - \sqrt{x}$ najväčšia pre $x = 0$ a najmenšia pre $x = 1$. Máme:

$$f(0) = \sqrt{1} = 1 \text{ a } f(1) = \sqrt{0} = 0.$$

Pretože $\sqrt{x}$ je rastúca funkcia, f je klesajúca a navyše nadobúda všetky hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tj. $H(f) = \langle 0, 1 \rangle$.

e) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Výraz $2x - \frac{\pi}{3}$ je definovaný pre akékoľvek reálne x a dosahuje akúkoľvek reálnu hodnotu. Keďže funkcia sínus je definovaná na celom $\mathbb{R}$, tak $D(f) = \mathbb{R}$. Navyše funkcia sínus nadobúda na $\mathbb{R}$ všetky hodnoty ležiace v intervale $\langle -1, 1 \rangle$, preto $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.

f) $f(x) = \log_3(9 - x^2)$

V argumente logaritmu nemôžu ležať nekladné čísla, preto musí byť splnené:

$$9 - x^2 > 0,$$

$$x^2 < 9,$$

$$|x| < 3.$$

Z toho vyplýva, že $D(f) = (-3, 3)$. Pretože $x^2 \geq 0$ pre akékoľvek x , tak $9 - x^2$ je maximálne, ak x^2 je minimálne, teda rovné 0. To je splnené iba pre $x = 0$. Logaritmus so základom väčším ako jedna je rastúca funkcia. Preto sa maximálna funkčná hodnota dosahuje

v bode 0 a je rovná $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$. Pre x blížiac sa ku krajným hodnotám intervalu $(-3, 3)$ sa hodnota argumentu logaritmu blíži k nule a vieme, že v tom prípade hodnota logaritmu ide do $-\infty$, teda klesá cez všetky medze. Z toho: $H(f) = (-\infty, 2)$.

g) $f(x) = e^{1-x^2}$

Exponenciálna funkcia je definovaná na celej množine reálnych čísel a rovnako tak aj $1 - x^2$, preto $D(f) = \mathbb{R}$.

Pretože $x^2 \geq 0$ pre akékoľvek x , tak $1 - x^2$ je maximálne, ak x^2 je minimálne, teda rovné 0. To je splnené iba pre $x = 0$. Keďže exponenciálna funkcia e^x je rastúca na celom $\mathbb{R}$, tak maximálna hodnota, ktorú môže funkcia f dosiahnuť je e a dosahuje sa v bode 0. Pre všetky ostatné body x definičného oboru platí $f(x) > 0$, pričom pre veľmi veľké hodnoty x alebo veľmi malé hodnoty x je $f(x)$ veľmi blízke nule. Pre žiadne $x \in \mathbb{R}$ však $f(x)$ nulu nedosiahne. Z toho vyplýva $H(f) = (0, e)$.

Definícia: zložená funkcia

Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ a nech $H(f) \cap B \neq \emptyset$. Funkciu $g \circ f: C \rightarrow \mathbb{R}$, kde $C = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \subseteq A$, takú, že pre každé $x \in C$ platí $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, nazývame zloženou funkciou z funkcií f a g . Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.

Príklad 3: Nech $f: \langle 4, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-4}$ a $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Nájdite $g \circ f$, $f \circ g$ a určte ich definičné obory.

Najprv $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x-4}}.$$

Funkcia f je na $A = \langle 4, \infty \rangle$ dobre definovaná a nadobúda všetky nezáporné hodnoty, tj. $H(f) = \langle 0, \infty \rangle$. Funkcia g je na $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dobre definovaná a platí $H(f) \cap B \neq \emptyset$, pretože $H(f) \cap B = (0, \infty)$.

Definičný obor $D(g \circ f)$ zloženej funkcie $g \circ f$ teda bude najväčšou (v zmysle inklúzie) podmnožinou intervalu $\langle 4, \infty \rangle$ takou, že pre každý bod $x \in D(g \circ f)$ bude $f(x) \in (0, \infty)$. Najväčšia taká množina je $(4, \infty)$. Preto $D(g \circ f) = (4, \infty)$.

Poznámka:

Uvedené možno ľahko zistiť priamo vyšetrením definičného oboru funkcie $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$. Aby totiž výraz $\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ mal zmysel, musí platiť:

$$x - 4 \geq 0 \text{ a súčasne } \sqrt{x-4} \neq 0.$$

To je splnené pre $x - 4 > 0$, teda pre $x > 4$. Alias $D(g \circ f) = (4, \infty)$.

Teraz $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 4} = \sqrt{\frac{1}{x} - 4}.$$

Aby výraz $\sqrt{\frac{1}{x} - 4}$ mal zmysel, musí platiť:

$$\frac{1}{x} - 4 \geq 0, x \neq 0.$$

To je splnené buď pre tie x , pre ktoré $1 - 4x \geq 0$ a súčasne $x > 0$, alebo pre tie x , pre ktoré $1 - 4x \leq 0$ a súčasne $x < 0$. To je možné splniť iba pre $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Takže $D(f \circ g) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Definícia: bijektívna funkcia

Funkciu $f: A \rightarrow B$ nazývame **injektívna** (prostá), ak pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in A$ platí:
ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkcia $f: A \rightarrow B$ sa nazýva **surjektívna**, ak $H(f) = B$, tj. ak pre každé $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$.

Funkcia $f: A \rightarrow B$ sa nazýva **bijektívna**, ak je injektívna a surjektívna.

Definícia: inverzná funkcia

Nech $f: A \rightarrow B$ je bijekcia. Funkciu $f^{-1}: B \rightarrow A$ definovanú vzťahom $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ pre každé $x \in A, y \in B$, nazývame inverznou funkciou k funkcii f .

Príklad 4: Zistite, či f je injektívna na svojom definičnom obore, ak:

a) $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$

Definičný obor funkcie f sú zrejme všetky reálne čísla okrem čísla -1 , tj. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Obmenou tvrdenia z definície injektívnej funkcie je: Pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:
ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak $x_1 = x_2$.

Overme to:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \\ \frac{1-x_1}{x_1+1} &= \frac{1-x_2}{x_2+1}, \\ (1-x_1)(x_2+1) &= (1-x_2)(x_1+1), \\ 1-x_1+x_2-x_1x_2 &= 1+x_1-x_2-x_1x_2, \\ x_2-x_1 &= x_1-x_2, \\ 2x_2 &= 2x_1, \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Čiže ak sú funkčné hodnoty v nejakých bodoch x_1, x_2 rovnaké, tak aj body x_1, x_2 sa musia rovnať. Funkcia f napĺňa definíciu injektívnej funkcie a je prostá.

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Definičný obor funkcie f sú zrejme všetky reálne čísla, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Overme, či je funkcia f injektívna:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2), \\
\frac{x_1}{x_1^2 + 1} &= \frac{x_2}{x_2^2 + 1}, \\
x_1(x_2^2 + 1) &= x_2(x_1^2 + 1), \\
x_1x_2^2 + x_1 &= x_2x_1^2 + x_2, \\
x_1x_2^2 - x_2x_1^2 &= x_2 - x_1, \\
x_1x_2(x_2 - x_1) &= x_2 - x_1.
\end{aligned}$$

Predpokladajme ďalej, že $x_1 \neq x_2$. Ak totiž $x_1 = x_2$, tak určite aj $f(x_1) = f(x_2)$. Máme:

$$x_1x_2 = 1. \quad (5)$$

To znamená, že existujú navzájom rôzne body x_1, x_2 z definičného oboru funkcie f také, že ich funkčné hodnoty sú rovnaké. Rovnica (5) hovorí, ako ich vybrať/nájsť.

Napr. zvolíme $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 2$ (platí $x_1x_2 = 1$), potom skutočne $f(x_1) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{2}{5} = \frac{2}{4+1} = f(x_2)$. Inými slovami funkcia f nie je injektívna.

Príklad 5: Nájdite inverznú funkciu k funkcii f , ak:

a) $f: \langle 3, \infty \rangle \rightarrow \langle 2, \infty \rangle, f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$

Funkcia f je zrejme na $\langle 3, \infty \rangle$ dobre definovaná a nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 2, \infty \rangle$. Je teda surjektívna. Je aj injektívna, pretože ak zoberieme $x_1, x_2 \in \langle 3, \infty \rangle$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$, potom:

$$\begin{aligned}
2 + \sqrt{x_1 - 3} &= 2 + \sqrt{x_2 - 3}, \\
\sqrt{x_1 - 3} &= \sqrt{x_2 - 3}, \\
x_1 - 3 &= x_2 - 3, \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Funkcia je teda bijektívna a existuje k nej inverzná funkcia. Nájdime jej predpis:

$$\begin{aligned}
y &= f(x), \\
y &= 2 + \sqrt{x-3}, \\
y - 2 &= \sqrt{x-3}, \\
(y - 2)^2 &= x - 3, \\
x &= 3 + (y - 2)^2.
\end{aligned} \quad (6)$$

Tento postup dáva predpis inverznej funkcie, ale zároveň určuje, že pre každé $y \in \langle 2, \infty \rangle$ existuje $x \in \langle 3, \infty \rangle$ - teda f je surjekcia, a súčasne, že také x je jediné, určené vzťahom (6) – teda f je injekcia.

Inverzná funkcia k funkcii f je teda funkcia f^{-1} taká, že:

$$f^{-1}: \langle 2, \infty \rangle \rightarrow \langle 3, \infty \rangle, f^{-1}(x) = 3 + (x - 2)^2.$$

Poznámka:

Zložením navzájom inverzných funkcií získame identitu, tj. pre tento príklad musí platiť:

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(x)) &= x \text{ pre každé } x \in \langle 2, \infty \rangle, \\
f^{-1}(f(x)) &= x \text{ pre každé } x \in \langle 3, \infty \rangle.
\end{aligned}$$

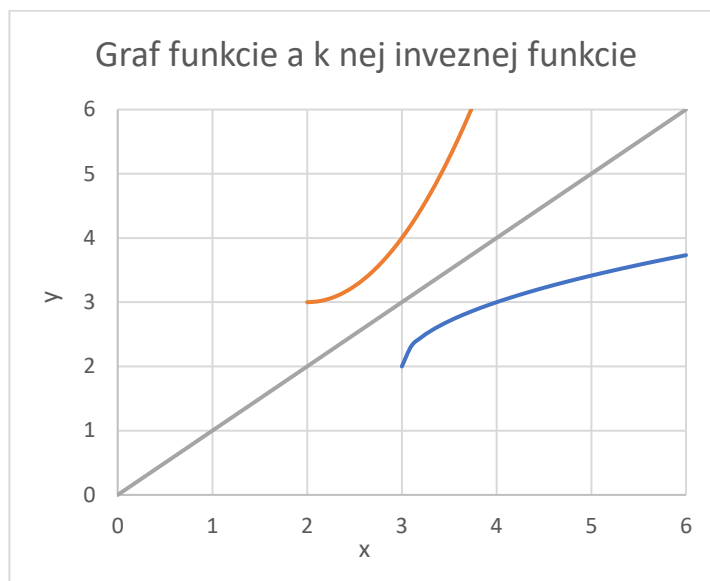
Uvedené overme ako skúšku správnosti riešenia tohto príkladu:

Pre každé $x \in \langle 2, \infty \rangle$ máme:

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(x)) &= 2 + \sqrt{f^{-1}(x) - 3} = 2 + \sqrt{3 + (x - 2)^2 - 3} = 2 + \sqrt{(x - 2)^2} = 2 + |x - 2| \\
&= 2 + (x - 2) = x.
\end{aligned}$$

Pre každé $x \in \langle 3, \infty \rangle$ máme:

$$f^{-1}(f(x)) = 3 + (f(x) - 2)^2 = 3 + (2 + \sqrt{x-3} - 2)^2 = 3 + (\sqrt{x-3})^2 = 3 + (x - 3) = x.$$



Na obrázku môžeme vidieť graf funkcie f – modrou a graf k nej inverznej funkcie – oranžovou. Grafy sú súmerné podľa priamky $y=x$ – sivou.

b) $f: (-\infty, 2) \rightarrow \langle 3, \infty), f(x) = x^2 - 4x + 7$

Funkcia f je zrejme na $(-\infty, 2)$ dobre definovaná, pretože výraz $x^2 - 4x + 7$ môžeme definovať pre akékoľvek reálne x . Upravme predpis funkcie:

$$f(x) = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

Z upraveného predpisu funkcie vidno, že f nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 3, \infty)$. Je teda surjektívna.

Je aj injektívna, pretože ak zoberieme $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$, potom:

$$(x_1 - 2)^2 + 3 = (x_2 - 2)^2 + 3,$$

$$(x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2,$$

$$\sqrt{(x_1 - 2)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2},$$

$$|x_1 - 2| = |x_2 - 2|.$$

Pretože $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$, tak $x_1 - 2 \leq 0, x_2 - 2 \leq 0$. Čiže $|x_1 - 2| = 2 - x_1$ a $|x_2 - 2| = 2 - x_2$. Z toho dostávame:

$$2 - x_1 = |x_1 - 2| = |x_2 - 2| = 2 - x_2,$$

$$-x_1 = -x_2,$$

$$x_1 = x_2.$$

Funkcia je teda bijektívna a existuje k nej inverzná funkcia. Nájdime jej predpis:

$$y = f(x),$$

$$y = (x - 2)^2 + 3,$$

$$\sqrt{y - 3} = |x - 2|. \quad (7)$$

Vzťah (7) určuje predpis pre dve funkcie: $x = 2 \pm \sqrt{y - 3}$. Z toho vyplýva, že ak by bola funkcia f definovaná na celom $\mathbb{R}$, zrejme by nebola injektívna. Funkcia f je však definovaná len na $(-\infty, 2)$, preto $|x - 2| = 2 - x$ a zo (7) nasleduje:

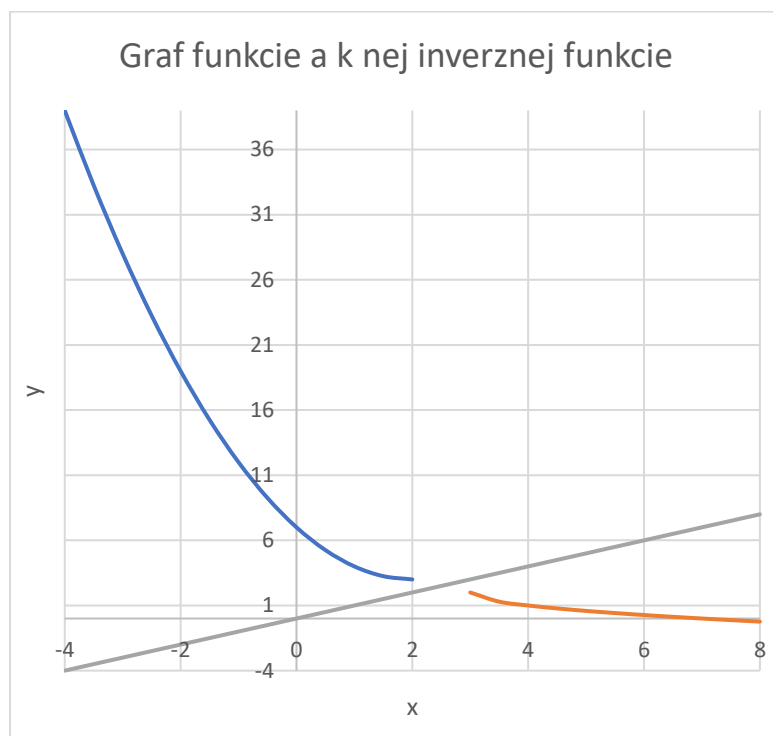
$$\sqrt{y - 3} = 2 - x,$$

$$x = 2 - \sqrt{y - 3}. \quad (8)$$

Opäť môžeme poznamenať, že hoci tento postup dáva predpis inverznej funkcie, zároveň určuje, že pre každé $y \in \langle 3, \infty)$ existuje $x \in (-\infty, 2)$ - teda f je surjekcia, a súčasne, že také x je jediné, určené vzťahom (8) - teda f je injekcia.

Inverzná funkcia k funkcii f je teda funkcia f^{-1} taká, že:

$$f^{-1}: \langle 3, \infty) \rightarrow (-\infty, 2), f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 3}.$$



Na obrázku môžeme vidieť graf funkcie f – modrou a graf k nej inverznej funkcie – oranžovou.
Grafy sú súmerné podľa priamky $y=x$ – sivou.