SÚČET A SÚČIN MATÍC, INVERZNÁ MATICA, DETERMINANTY ŠTVORCOVÝCH MATÍC

Súčet matíc:

Nech $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, matica $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$ a matica $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$. Potom $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$ definujeme rovnosťou $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

Pri sčitovaní matíc musíme teda sčitovať matice rovnakého rozmeru a každý prvok výslednej matice je súčtom prvku jednej matice v danom riadku a stĺpci a prvku druhej matice v tom istom riadku a stĺpci.

Príklad 1: Sčítajte matice A, B, ak:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -5 \\ 7 & -5 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -5 \\ 7 & -5 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3) & (3-1) & (-4+0) & (5-5) \\ (1+7) & (0-5) & (-3+4) & (8-8) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0-3) & (1+2) \\ (2-5) & (3+1) \\ (4-6) & (5+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ nie je definované}$$

Skalárny súčin vektorov:

Skalárnym súčinom vektorov $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ rozumieme súčin $\vec{u}^T\vec{v}$, tj.:

$$\vec{u}^T\vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

Súčin matíc:

Nech $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Nech matica $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$ a matica $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le k}} \in \mathbb{R}^{n\times k}(\mathbb{C}^{n\times k})$, tzn. matica A má m riadkov dĺžky n: $A = (A_{i*})_{1\le i\le m}$ (každý z riadkov matice A je teda riadkovým vektorom s n prvkami) a matica B má k stĺpcov dĺžky n: $B = (B_{*j})_{1\le j\le k}$ (každý zo stĺpcov matice B je teda stĺpcovým vektorom s n prvkami). Potom súčinom matíc AB rozumieme maticu $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le k}} \in \mathbb{R}^{m\times k}(\mathbb{C}^{m\times k})$ takú, že $c_{ij} = A_{i*}B_{*j}$ (čiže prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci výslednej matice je skalárnym súčinom i-teho riadku matice A a j-teho stĺpca matice B).

Príklad 2: Nájdite súčin matíc AB, ak:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -5 \\ 7 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -5 \\ 7 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2.3 + 3.0 + (-4).7 + 5.4) & (2.(-1) + 3.(-5) - 4.(-6) + 5.(-8)) \\ (1.3 + 0.0 + (-3).7 + 8.4) & (1.(-1) + 0.(-5) - 3.(-6) + 8.(-8)) \\ (1.3 + 5.0 + (-2).7 - 1.4) & (1.(-1) + 5.(-5) - 2.(-6) - 1.(-8)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -33 \\ 14 & -47 \\ -15 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.2 + 1.0) & (0.1 + 1.0) & (0.(-3) + 1.0) \\ (2.2 + 3.0) & (2.1 + 3.0) & (2.(-3) + 3.0) \\ (4.2 + 5.0) & (4.1 + 5.0) & (4.(-3) + 5.0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ nie je definované}$$

Uvažujme sústavu (S) m-lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Označme A maticu sústavy (S), tj.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nech vektor pravých strán:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

a vektor neznámych:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Potom sústavu (S) môžeme zapísať pomocou súčinu matíc ako rovnosť:

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{1}$$

Maticu sústavy A môžeme zapísať po stĺpcoch nasledujúcim spôsobom:

$$A = (A_{*1}\ A_{*2}\ \dots\ A_{*n})$$

Potom (1) vieme prepísať ako:

$$(A_{*1}\ A_{*2}\ \dots\ A_{*n})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Odtiaľ:

$$x_1A_{*1} + x_2A_{*2} \dots x_nA_{*n} = \vec{b} \tag{2}$$

Teda sústava má riešenie práve vtedy, keď vektor pravých strán $\vec{b}$ je lineárnou kombináciou stĺpcov matice sústavy A.

Z predchádzajúcej poznámky vyplýva, že sústava (S) so zápisom (1) má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy (*Frobéniova veta*).
Z (2) totiž máme, že $\vec{b}$ je lineárnou kombináciou stĺpcov matice sústavy A práve vtedy, keď má sústava riešenie. Ak je tomu tak, tak pridaním $\vec{b}$ k matici sústavy (čím vytvoríme rozšírenú maticu sústavy) nezmeníme hodnosť matice.
Ak však sústava nemá riešenie, tak $\vec{b}$ nie je lineárnou kombináciou stĺpcov matice sústavy a je „na nich lineárne nezávislý“. Inými slovami zvyšuje hodnosť rozšírenej matice sústavy o jedna.

Štvorcová matica je matica, ktorá má rovnaký počet riadkov ako stĺpcov.
Prvky $a_{ii}, i = 1,2, \dots, n$ štvorcovej matice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvoria **hlavnú diagonálu matice** A.
Matica $\boldsymbol{I_n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ktorá má všetky čísla na hlavnej diagonále rovné 1 a ostatné prvky nulové, sa nazýva **jednotková matica**.
Pre štvorcovú maticu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme inverznú maticu ako $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pre ktorú $AB = I_n$.
Inverznú maticu k matici A označujeme $\boldsymbol{A^{-1}}$. K danej matici A existuje najviac jedna inverzná matica, navyše ak $AB = I_n$, tak aj $BA = I_n$.

Príklad 3: Nájdite inverznú maticu k matici A, ak:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 := R_1 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 := R_2 + 2R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 := \frac{1}{14}R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{array}\right) \underset{R_1 := R_1 - 5R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \\ 0 & 1 & \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$$

Inverznou maticou k matici A je teda:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(12+2)}{14} & \frac{(-3+3)}{14} \\ \frac{(-8+8)}{14} & \frac{(2+12)}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 := -R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 := R_2 + 3R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 := R_3 - 4R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 := R_2 + 2R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 := R_3 + 2R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 34 & 2 & 14 & 5 \end{array}\right) \underset{R_3 := \frac{1}{34}R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 := R_2 - 14R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{array}\right) \underset{R_1 := R_1 + R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{-10}{17} & \frac{5}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 := R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{7}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

Inverznou maticou k matici A je teda:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{7}{34} \\ \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 6 & -26 & -2 \\ 2 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 6 & -26 & -2 \\ 2 & 14 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{34}\begin{pmatrix} (12+12+10) & (-18-52+70) & (-21-4+25) \\ (4-6+2) & (-6+26+14) & (-7+2+5) \\ (-16+12+4) & (24-52+28) & (28-4+10) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 34 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

Uvažujme sústavu (S) so zápisom (1). Predpokladajme, že $m = n$, tj. matica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (je teda štvorcová) a existuje k nej inverzná matica A^{-1}. Vynásobme obe strany rovnice (1) maticou A^{-1} zľava, dostaneme:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{3}$$

Vidíme, že riešenie sústavy v tomto špeciálnom prípade môžeme získať zo vzťahu (3).

Ukážeme na **príklade 1 z minulého týždňa.** Matica sústavy z tohto príkladu je práve tá z príkladu **3b).** K nej sme našli inverznú maticu. Zo zadania príkladu 1 z minulého týždňa máme vektor pravých strán:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Podľa (3) má sústava jediné riešenie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{7}{34} \\ \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(6+28)}{34} \\ \frac{(-13-4)}{17} \\ \frac{(14+20)}{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uvedené riešenie je skutočne také isté ako to, ktoré sme získali GEM.

Veta:
Nech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a) existuje matica A^{-1},
b) $h(A) = n$,
c) riadky matice A sú lineárne nezávislé,
d) stĺpce matice A sú lineárne nezávislé.

Definícia: Štvorcová matica, ktorá má inverznú, sa nazýva **regulárna**.

Determinant:
Nech $n \in \mathbb{N}$ a matica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$. **Determinant matice** A (označujeme $\det A$ alebo zapíšeme maticu medzi dve zvislé rovné čiary $|A|$) je definovaný:

1. Ak $n = 1$, $A = (a_{11})$, tak $\det A = a_{11}$.
2. Ak $n > 1$, označíme A_{ij} maticu, ktorá vznikne z matice A odstránením stĺpca A_{*j} a riadku A_{i*}, tak $\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$ (rozvoj podľa prvého riadku).

Príklad 4: Vypočítajte determinant matice A, ak:

a) $A = (-4)$

$$\det A = -4$$

b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-4)(-1) + (-1)^{1+2}(-2)(-3) = 4 - 6 = -2$$

Pozn.:

Determinant matice $A = \in \mathbb{R}^{2\times 2}(\mathbb{C}^{2\times 2})$ teda vypočítame ako súčin prvkov na hlavnej diagonále mínus súčin prvkov na vedľajšej diagonále:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

c) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+1}(-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}0\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(-2-4) + 2(-6-5) + 0(-12+5) = 24 - 22 + 0 = 2$$

Pozn.:

Na výpočet determinantu matice $A = \in \mathbb{R}^{3\times 3}(\mathbb{C}^{3\times 3})$ môžeme využiť Sarusovo pravidlo: Prvé dva stĺpce pripíšeme za maticu ako štvrtý a piaty stĺpec a determinant je súčet všetkých troch súčinov na hlavných diagonálach (zľava hore doprava dole) mínus súčet súčinov na troch vedľajších diagonálach:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Vypočítajme teraz determinant matice A pomocou Sarusovho pravidla

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 -2 \\ -3 -1 \\ 5 \;\; 4 \end{matrix}$$
$$= (-4).(-1).2 + (-2).1.5 + 0.(-3).4$$
$$- (0.(-1).5 + (-4).1.4 + (-2).(-3).2) = 8 - 10 + 0 - 0 + 16 - 12$$
$$= 2$$

d) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 36 & 58 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Na výpočet nemusíme nutne použiť rozvoj podľa prvého riadka. V tomto prípade je vhodnejšie (a jednoduchšie) použiť rozvoj podľa štvrtého stĺpca:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 36 & 58 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 0(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 36 & 58 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 36 & 58 & 4 \end{vmatrix}$$
$$+ 0(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 36 & 58 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + 0 + 0 + 3\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \left(\text{znovu rozvoj podľa posledného stĺpca}\right)$$
$$= 3\left(0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 3\big(0 + (-1)(-16+10) + 2(4-6)\big) = 3(6-4) = 6$$

Pozn.:

Súčet v exponente pri (-1) značí: *poradové číslo riadka* + *poradové číslo stĺpca*.

Ak $B(\sim A)$ vznikla z matice A pomocou ERO:

1. násobenia niektorého riadka číslom α, tak $\det B = \alpha \det A$,
2. vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $\det B = -\det A$,
3. pričítaním násobku niektorého riadka k inému riadku, tak $\det B = \det A$.

Príklad 5: Vypočítajte determinant matice A, ak:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{R_3 := \frac{1}{3}R_3}{=} \mathbf{3} \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_3}{=} (-\mathbf{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4 := R_4 + R_2}{=} (-\mathbf{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_2 := R_2 - 4R_1}{=} (-\mathbf{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 13 & -7 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_3 := R_3 - 5R_1}{=}$$

$$(-\mathbf{3}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 13 & -7 \\ 0 & -8 & 13 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_4}{=} \mathbf{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 13 & -7 \\ 0 & -6 & 13 & -7 \end{vmatrix} \underset{R_3 := R_3 + 8R_2}{=} \mathbf{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & -15 \\ 0 & -6 & 13 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4 := R_4 + 6R_2}{=} \mathbf{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & -15 \\ 0 & 0 & 25 & -13 \end{vmatrix} \underset{R_4 := 29R_4}{=} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{29}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & -15 \\ 0 & 0 & 725 & -377 \end{vmatrix} \underset{R_4 := R_4 - 25R_3}{=}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{29}} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{29} & -15 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \frac{3}{29} 29(-2) = -6$$

Iný postup:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & -15 \\ 0 & 0 & 25 & -13 \end{vmatrix} = (\text{rozvoj podľa prvého stĺpca})$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 29 & -15 \\ 0 & 25 & -13 \end{vmatrix} = (\text{rozvoj podľa prvého stĺpca}) = 3 \begin{vmatrix} 29 & -15 \\ 25 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 3\big(29(-13) - 25(-15)\big) = 3\big(25(15-13) + 4(-13)\big) = 3(50 - 52) = -6$$

b) $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix} \underset{R_3 := R_3 + R_1}{=} \begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 48 & 46 & 44 \end{vmatrix} \underset{R_3 := R_3 - 2R_2}{=} \begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_2 := R_2 - 2R_1}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3 := R_3 + R_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_4 := R_4 + 4R_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_4 \leftrightarrow R_5}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix} \underset{R_5 := R_5 - 11R_4}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)(-10) = -10$$

Iný postup:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\text{rozvoj podľa prvého stĺpca}\right) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\text{prvý determinant: rozvoj podľa prvého stĺpca, druhý determinant: rozvoj podľa prvého riadku}\right)$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\text{prvý determinant: rozvoj podľa prvého stĺpca, druhý determinant: rozvoj podľa prvého riadku}\right)$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(4-3) - (6-0) = -4 - 6$$

$$= -10$$

Determinant regulárnej matice je rôzny od nuly.

Pre maticu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} (\mathbb{C}^{n \times n})$ označme $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. $\tilde{a}_{ij}$ sa nazýva **algebraický doplnok** prvku a_{ij} v matici A. Nech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} (\mathbb{C}^{n \times n})$ je regulárna a nech $\operatorname{adj} A = (\tilde{a}_{ij})^T$ (**matica adjungovaná** k matici A), potom:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Príklad 6: Nájdite inverznú maticu k matici A, ak:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 3.4 - 1.(-2) = 12 + 2 = 14$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_1 := -R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{R_2 := R_2 + 3R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3 := R_3 - 4R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 4 = 34$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 6 & -26 & -2 \\ 2 & 14 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{7}{34} \\ \frac{3}{17} & \frac{-13}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Matica A nemá inverznú, pretože nie je regulárna.

Poznámka:

Nech $A \in \mathbb{R}^{n \times n} (\mathbb{C}^{n \times n})$ je rôzna od nulovej matice. $\det A \neq 0$ práve vtedy, keď $h(A) = n$. Ak $\det A = 0$, tak $1 \leq h(A) < n$ a naopak.

Cramerovo pravidlo:

Ak $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$ je regulárna a $\vec{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}(\mathbb{C}^{n\times 1})$, tak má sústava lineárnych rovníc $A\vec{x} = \vec{b}$ práve jedno riešenie $\vec{x}^T = \left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \dots, \frac{d_n}{d}\right)$, kde $d = \det A$ a d_j pre $j = 1,2,\dots,n$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice A zámenou stĺpca A_{*j} za $\vec{b}$ (pravú stranu).

Príklad 7: Riešte sústavu lineárnych rovníc Cramerovým pravidlom:

$$-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

Determinant matice sústavy $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sme vypočítali v **príklade 6b)**, tj. máme:

$$d = \det A = 34.$$

Vypočítajme ostatné determinanty (napr. Sarusovým pravidlom):

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 8 + 10) - (-20 + 0 + 4) = 34$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 0 - 20) - (20 - 12 + 0) = -34$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (12 + 8 + 0) - (0 - 6 - 8) = 34$$

Riešením sústavy potom bude:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{34}{34} = 1$$

$$x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-34}{34} = -1$$

$$x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{34}{34} = 1$$