

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍČ, HODNOSŤ MATICE, LINEÁRNA NEZÁVISLOSŤ VEKTOROV

Sústavou m -lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Matica sústavy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektor pravých strán:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rozšírená matica sústavy:

$$(A \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \text{ resp. } (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Pri riešení sústav m -lineárnych rovníc s n neznámymi budeme postupovať **Gaussovou eliminačnou metódou** (ďalej **GEM**) alebo **Gaussovou-Jordanovou eliminačnou metódou** (ďalej **GJEM**). Obe metódy využívajú úpravy matice sústavy, ktoré nemenia množinu riešení zodpovedajúcej sústavy, nazývame ich **elementárne riadkové operácie** (ďalej **ERO**). Sú to:

1. ERO1 Vzájomná výmena riadkov: $R_i \leftrightarrow R_j$ (i -ty riadok vymeníme s j -tym riadkom)
2. ERO2 Násobenie niektorého riadku nenulovým číslom: $R_i := \alpha R_i$, kde $\alpha \neq 0$ (každý prvok i -teho riadku vynásobíme číslom α)
3. ERO3 Pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku: $R_i := R_i + \alpha R_j$ (ku každému prvku v i -tom riadku pripočítame α -násobok prvku j -teho riadku ležiaceho v príslušnom stĺpci)

Príklad 1: Riešte sústavu lineárnych rovníc GEM aj GJEM:

$$-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

Napišme najprv rozšírenú maticu sústavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Upravujeme rozšírenú maticu sústavy pomocou ERO. Pri GEM upravujeme maticu na stupňovitú maticu:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) R_3 &:= \frac{1}{2} R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) R_2 &:= -R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) R_2 &:= R_2 + 3R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) R_3 &:= R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \\ R_2 \leftrightarrow R_3 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) R_3 &:= R_3 + 5R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Matica je v stupňovitom tvare a riešenie sústavy dostaneme z tejto upravenej matice:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 17x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostaneme: $x_3 = 1$. Dosadením za x_3 do druhej rovnice dostaneme $x_2 = -1$ a dosadením za x_3 a za x_2 do prvej rovnice dostaneme $x_1 = 1$. Sústava má jediné riešenie, zapíšeme: $P = \{(1, -1, 1)\}$.

Pri GJEM upravujeme ďalej až na redukovanú stupňovitú maticu, z ktorej riešenie okamžite vidno:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) &\sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right) R_3 &:= \frac{1}{17} R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 &:= -R_2 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 &:= R_2 + 3R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_1 &:= R_1 + R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ R_1 &:= R_1 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Čiže:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Pochopiteľne riešenie sústavy sme dostali to isté, tj. $P = \{(1, -1, 1)\}$.

Ďalej budeme používať už len GEM, ak nebude povedané inak.

Príklad 2: Riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 + i$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 - 2i$$

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 2+i \\ 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 1 & 3 & 4 & | & 8-2i \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 3 & 2 & 1 & | & 2+i \\ 1 & 3 & 4 & | & 8-2i \end{pmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 0 & -10 & -20 & | & -40+10i \\ 1 & 3 & 4 & | & 8-2i \end{pmatrix}$$

$$R_2 := \frac{-1}{10} R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 0 & 1 & 2 & | & 4-i \\ 1 & 3 & 4 & | & 8-2i \end{pmatrix} R_3 := R_3 - R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 0 & 1 & 2 & | & 4-i \\ 0 & -1 & -3 & | & -6+i \end{pmatrix} R_3 := R_3 + R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 14-3i \\ 0 & 1 & 2 & | & 4-i \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Riešenie sústavy dostaneme teda z rovníc:

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i$$

$$x_2 + 2x_3 = 4 - i$$

$$-x_3 = -2$$

Odtiaľ: $x_3 = 2$, $x_2 = -i$, $x_1 = i$. Sústava má jediné riešenie: $P = \{(i, -i, 2)\}$.

Príklad 3: Riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3$$

$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11$$

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & | & 3 \\ -2 & 3 & -5 & | & -3 \\ 2 & 2 & -4 & | & 11 \end{pmatrix} R_1 := R_1 + R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 3 & -5 & | & -3 \\ 2 & 2 & -4 & | & 11 \end{pmatrix} R_3 := R_3 + R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 3 & -5 & | & -3 \\ 0 & 5 & -9 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$R_2 := R_2 + 2R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & -9 & | & -3 \\ 0 & 5 & -9 & | & 8 \end{pmatrix} R_3 := R_3 - R_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & -9 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Podľa posledného riadku stupňovitej matice by malo byť splnené $(0x_1 + 0x_2 + 0x_3 =) 0 = 11$, čo neplatí a preto sústava nemá riešenie. Zapišeme: $P = \emptyset$.

Príklad 4: Riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1$$

$$2x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 1$$

$$5x_2 - x_3 = 0$$

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -7 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} R_2 := R_2 + R_1 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -7 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} R_3 := R_3 - R_1 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 := R_3 - R_2 \\ R_4 := R_4 - R_2 \end{matrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nulové riadky na spodku stupňovitej matice indikujú, že sústava má nekonečne veľa riešení. Riešením sústavy však nie sú všetky body priestoru $\mathbb{R}^3$. Sú to len tie body (x_1, x_2, x_3) z $\mathbb{R}^3$, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$$

$$5x_2 - x_3 = 0$$

Označme $x_3 = t \in \mathbb{R}$ ako parameter (**pri výbere parametrov je výhodné, až vhodné ako parametre voliť tie premenné, ktorým zodpovedá stĺpec bez pivota**). Potom z druhej rovnice máme: $x_2 = \frac{t}{5}$. Z prvej rovnice získame: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{14}{5}t$. Riešením sústavy je teda: $P = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{14}{5}t, \frac{t}{5}, t \right); t \in \mathbb{R} \right\}$.

Skúška správnosti:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{14}{5}t \right) + \frac{2}{5}t - 6t &= 1 + \frac{28}{5}t + \frac{2}{5}t - \frac{30}{5}t = 1 \\ -2 \left(\frac{1}{2} + \frac{14}{5}t \right) + \frac{3}{5}t + 5t &= -1 - \frac{28}{5}t + \frac{3}{5}t + \frac{25}{5}t = -1 \\ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{14}{5}t \right) + \frac{7}{5}t - 7t &= 1 + \frac{28}{5}t + \frac{7}{5}t - \frac{35}{5}t = 1 \\ 5 \frac{t}{5} - t &= t - t = 0 \end{aligned}$$

Príklad 5: Riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$$

$$-5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 2$$

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ -5 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_4 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ -5 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} R_2 := R_2 + 5R_1 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 14 & 8 & -28 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &:= R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 14 & 8 & -28 & 12 \\ 0 & -7 & -4 & 14 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim R_4 := R_4 - 3R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 14 & 8 & -28 & 12 \\ 0 & -7 & -4 & 14 & -6 \\ 0 & -7 & -4 & 14 & -6 \end{array} \right) R_2 := \frac{1}{2} R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & -14 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 14 & -6 \\ 0 & -7 & -4 & 14 & -6 \end{array} \right) R_3 := R_3 + R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&R_4 := R_4 + R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení. Riešením sú všetky body (x_1, x_2, x_3, x_4) z $\mathbb{R}^4$, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 2$$

$$7x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 6$$

Za parametre zvolíme premenné x_3 a x_4 , tj. $x_3 = u \in \mathbb{R}$ a $x_4 = v \in \mathbb{R}$. Potom z druhej rovnice dostaneme:

$$x_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{7}u + 2v.$$

Dosadením za x_2 , x_3 , resp. x_4 do prvej rovnice získame:

$$x_1 = -\frac{4}{7} + \frac{5}{7}u.$$

Riešením sústavy teda je $P = \left\{ \left(-\frac{4}{7} + \frac{5}{7}u, \frac{6}{7} - \frac{4}{7}u + 2v, u, v \right); u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \right\}$.

Príklad 6: Riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2$$

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -1$$

$$3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 12x_4 = 7$$

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -8 & -1 \\ 3 & 9 & -2 & 12 & 7 \end{array} \right) R_2 := R_2 + R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 12 & 7 \end{array} \right) R_3 := R_3 - 3R_1 \\
&\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) R_3 := R_3 - R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení. Riešením sú všetky body (x_1, x_2, x_3, x_4) z $\mathbb{R}^4$, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2$$

$$x_3 - 3x_4 = 1$$

Za parametre zvolíme premenné x_2 a x_4 , tj. $x_2 = u \in \mathbb{R}$ a $x_4 = v \in \mathbb{R}$. Potom z druhej rovnice dostaneme:

$$x_3 = 1 + 3v.$$

Dosadením za x_2, x_3 , resp. x_4 do prvej rovnice získame:

$$x_1 = 3 - 3u - 2v.$$

Riešením sústavy teda je $P = \{(3 - 3u - 2v, u, 1 + 3v, v); u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Hodnosť matice:

Nech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m \times n})$ a nech B je stupňovitá matica riadkovo ekvivalentná s maticou A (teda B dostaneme z A po konečnom počte ERO). Počet nenulových riadkov (pivotov) matice B sa nazýva hodnosť matice A .

Príklad 7: Určte hodnosť matice A , ak:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aby sme našli hodnosť matice A , musíme upraviť A na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 := R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 := R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 := R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Počet pivotov v stupňovitej matici je rovný 3. Teda hodnosť matice A je 3. Zapišeme: $h(A) = 3$.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica A je transponovaná matica z príkladu 7a), teda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravme ju na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 := R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 := R_3 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 := 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 := R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 := R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Dostali sme: $h(A) = 3$. Vidíme, že v tomto prípade platí, že hodnosť matice a hodnosť transponovanej matice je rovnaká.

Pozn.:

Tento záver platí aj vo všeobecnosti, teda: ak $A \in \mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m \times n})$, potom $h(A) = h(A^T)$.

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Upravme A na stupňovitú maticu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} R_1 := R_1 - R_3 \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} R_3 := R_3 + 3R_1 \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & -13 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} R_4 := R_4 + 4R_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & -13 \\ 0 & -19 & -19 \end{pmatrix} R_3 := R_3 + 13R_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -19 \end{pmatrix} R_4 := R_4 + 19R_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme teda: $h(A) = 2$.

Maticu z $\mathbb{R}^{1 \times n}(\mathbb{C}^{1 \times n})$, kde $n \in \mathbb{N}$ je také, že $n > 1$, nazývame **riadkový vektor**. Maticu z $\mathbb{R}^{n \times 1}(\mathbb{C}^{n \times 1})$, kde $n \in \mathbb{N}$ je také, že $n > 1$, nazývame **stĺpcový vektor**. Vektor obyčajne označujeme $\vec{x}$. Týmto označením budeme rozumieť stĺpcový vektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Riadkový vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bude transpozíciou stĺpcového vektora $\vec{x}$, čo zapíšeme:

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

S takýmto označením je zbytočné písať $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ alebo $\vec{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Jednoducho napíšeme $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, resp. $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

Lineárna závislosť a nezávislosť v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$:

Nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$.

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ sa nazýva **lineárna kombinácia** vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$. (Pozn.: *Násobenie vektora skalárom znamená, že každý prvok vektora sa prenásobí skalárom.*)

Hovoríme, že k -tica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ je **lineárne nezávislá**, ak $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. (Pozn.: $\vec{0} \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ je nulový vektor, tj. $\vec{0}^T = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n\text{-krát}}$)

Ak k -tica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ nie je lineárne nezávislá, tak hovoríme, že je **lineárne závislá**.

Príklad 8: Zistite, či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé:

$$\text{a) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trojica vektorov $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bude lineárne nezávislá (ďalej LNZ) práve vtedy, keď:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Ak nie je LNZ, tak je lineárne závislá (ďalej LZ).

Upravme rovnosť na ľavej strane implikácie:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Pri vyšetrovaní LNZ, resp. LZ teda treba vyriešiť sústavu lineárnych rovníc:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

s neznámymi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a nulovou pravou stranou. Takáto sústava má práve jedno riešenie alebo nekonečne veľa riešení. Ak má jediné riešenie, potom tým riešením je práve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a teda trojica vektorov $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je LNZ. Ak má nekonečne veľa riešení, potom okrem nulového riešenia existujú aj ďalšie, nenulové riešenia a trojica vektorov $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je LZ, inými slovami je možné niektorý z vektorov vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov.

Vyriešme sústavu GEM. Pri úpravách nemusíme vypisovať rozšírenú maticu sústavy, pretože pravá strana je nulová a žiadna ERO ju nezmení. To znamená, že upravujeme maticu sústavy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pomocou ERO dovtedy, kým nedostaneme stupňovitú maticu. To sme pre maticu A už urobili v príklade 7a) a dostali sme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Odtiaľ máme:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0$$

$$-13\alpha_3 = 0$$

Tomu vyhovuje jediné riešenie: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a teda trojica vektorov $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je LNZ.

$$\text{b) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že vyšetrit' LNZ, resp. LZ vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ znamená vyriešiť sústavu lineárnych rovníc s nulovou pravou stranou, v tomto prípade nasledujúcu sústavu:

$$2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$$

$$4\alpha_1 + \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0$$

Vyriešme sústavu GEM. Pri úpravách nemusíme vypisovať rozšírenú maticu sústavy, pretože pravá strana je nulová a žiadna ERO ju nezmení. Pre maticu tejto sústavy sme to už urobili v príklade 7c) a dostali sme:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odtiaľ máme:

$$-\alpha_1 - 5\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Ak $\alpha_3 = p$ je parameter, tj. ľubovoľné reálne číslo, tak $\alpha_2 = -p$ a $\alpha_1 = -2p$. Sústava má teda nekonečne veľa riešení: $P = \{(-2p, -p, p); p \in \mathbb{R}\}$ a trojica vektorov $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je LZ.

Pozn.:

To, že $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je LZ, implikuje, že niektorý z vektorov môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov. Je tomu skutočne tak, pretože z rovnice:

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = -2p \vec{v}_1 - p \vec{v}_2 + p \vec{v}_3$$

dostávame pre nenulové p :

$$-2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

a teda napr.: $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Inými slovami vektor $\vec{v}_3$ je kombináciou dvojnásobku vektora $\vec{v}_1$ a jednonásobku vektora $\vec{v}_2$.

To je možné ľahko overiť:

$$2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \vec{v}_3.$$

Pozn.:

Úlohy z príkladov 7 a 8 indikujú, že hodnosť matice vlastne určuje maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov matice a pretože platí $h(A) = h(A^T)$ pre akúkoľvek maticu A , tak vlastne hodnosť matice súčasne určuje aj maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice. Je tomu skutočne tak.