NEKONEČNÉ RADY

Limitné podielové (D'Alembert-ovo) kritérium konvergencie nekončených radov:

Uvažujme nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $a_n \neq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ak:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Príklad 1: Vyšetrite konvergenciu radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+7)4^{n+1}}{(n-1)!}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \frac{(2n+7)4^{n+1}}{(n-1)!}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2(n+1)+7)4^{n+2}}{n!}}{\frac{(2n+7)4^{n+1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4(2n+9)4^{n+1}}{n(n-1)!}}{\frac{(2n+7)4^{n+1}}{(n-1)!}}$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{2n+9}{n(2n+7)} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{9}{n}\right)}{n(2n+7)} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{9}{n}}{2n+7} = \frac{8+0}{\infty} = 0 < 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+7)4^{n+1}}{(n-1)!}$ je konvergentný.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{n!}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \frac{n^6}{n!}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^6}{(n+1)!}}{\frac{n^6}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^6}{n^6}\frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^6 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^6\right) = 0.1 = 0 < 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{n!}$ je konvergentný.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{3^n}{3.3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}(1+0)^3 = \frac{1}{3} < 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ je konvergentný.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n$, kde $p \in \mathbb{R}$ je také, že $p \geq 1$ a $a \in \mathbb{R}$ je také, že $0 < a < 1$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = n^p a^n,$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p a^{n+1}}{n^p a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{a^n a}{a^n} = a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p$$
$$= a \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = a(1+0)^p = a < 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n$ je konvergentný.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(5n^3+3n+11)}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \frac{3^n}{2^n(5n^3+3n+11)},$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(5(n+1)^3 + 3(n+1) + 11)}}{\frac{3^n}{2^n(5n^3+3n+11)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{5n^3+3n+11}{5(n^3+3n^2+3n+1) + 3n + 3 + 11}$$
$$= \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n+11}{5n^3+15n^2+18n+19} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(5 + \frac{3}{n^2} + \frac{11}{n^3}\right)}{n^3\left(5 + \frac{15}{n} + \frac{18}{n^2} + \frac{19}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2} + \frac{11}{n^3}}{5 + \frac{15}{n} + \frac{18}{n^2} + \frac{19}{n^3}} = \frac{3}{2} . \frac{5}{5} = \frac{3}{2} > 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(5n^3+3n+11)}$ je divergentný.

Limitné odmocninové (Cauchy-ho) kritérium konvergencie nekončených radov:

Uvažujme nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ak:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Príklad 2: Vyšetrite konvergenciu radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{\frac{2n}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-2}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$ je konvergentný.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n^2+3n}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2} = e(1+0)^2 = e > 1$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$ je divergentný.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$

Riešenie:

Označme:

$$a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$$

potom:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{2^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{2^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{n}{n}}}{2^{\frac{n^2}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0,$$

kde v poslednom kroku úpravy limity sme využili nutnú podmienku konvergencie nekonečného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, ktorý je podľa D'Alembertovho limitného kritéria konvergencie nekonečného radu konvergentný:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2.2^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n} = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} < 1$$

Pretože $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{2^{n^2}}\right|} = 0 < 1$, podľa Cauchyho limitného kritéria je rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$ konvergentný.

Uvažujme nekonečné rady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Ak pre každé $n\in\mathbb{N}$ platí: $|a_n|\le b_n$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ nazývame **majorantným** radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a značíme $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Porovnávacie kritérium konvergencie nekončených radov:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Ak:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je konvergetný, tak aj $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentný;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je divergentný, tak aj $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je divergentný.

Príklad 3: Vyšetrite konvergenciu radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{5^n}$

Riešenie:

Pre každé $n\in\mathbb{N}$ platí:

$$\left|\frac{\sin n}{5^n}\right| = \frac{|\sin n|}{5^n} \le \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{5^n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{5^n}$ a keďže je konvergentný $\Big($pretože ide o geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{5}\Big)$, podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{5^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$

Riešenie:

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$ a keďže je konvergentný $\Big($pretože ide o geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{2}\Big)$, podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$

Riešenie:

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|\frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}\right| = \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n} \leq \frac{n^3\left(\sqrt{2}+1\right)^n}{3^n} = n^3\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$ a keďže podľa **príkladu 1d)**, kde $p = 3$ a $a = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$, je konvergentný, tak podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí: $\sin x \leq x$ (*overte*), tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$\left| \frac{n^4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right| = \frac{n^4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq \frac{n^4}{\pi} \frac{\pi}{2^n} = n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ a keďže podľa **príkladu 1d)**, kde $p = 4$ a $a = \frac{1}{2}$, je konvergentný, tak podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ platí: $\operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi} x$ (*overte*), tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$\left| n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \right| = n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \leq n \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\pi}{4} \frac{4}{\pi} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ a keďže podľa **príkladu 1d)**, kde $p = 1$ a $a = \frac{1}{2}$, je konvergentný, tak podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

Tvrdenie 1:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ je konvergentný práve vtedy, keď $p > 1$.

Príklad 4: Vyšetrite konvergenciu radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in \langle 1, \infty)$ platí: $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x$, tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{n}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}$, ktorý podľa **Tvrdenia 1** diverguje, keďže príslušné $p = \frac{1}{2}$. Preto podľa porovnávacieho kritéria diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in (0, \infty)$ platí: $\ln x < x$ (*overte*), tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, ktorý je podľa **Tvrdenia 1** divergentný a preto je podľa porovnávacieho kritéria divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí: $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$ (*overte*), tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \geq n^2 \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^3} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}$, ktorý je podľa **Tvrdenia 1** divergentný a preto je podľa porovnávacieho kritéria divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^2+3}\right)$

Riešenie:

Pretože pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ platí: $x \leq \operatorname{tg} x$ (*overte*), tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^2+3}\right) \geq n \frac{n}{n^2+3} = \frac{n^2}{n^2+3}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^2+3}\right)$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^2+3}\right)$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$, ktorý je divergentný, pretože nespĺňa nutnú podmienku konvergencie nekonečného radu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3-3}{n^2+3} \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{3}{n^2+3} = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Preto je podľa porovnávacieho kritéria divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^2+3}\right)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$

Riešenie:

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{9n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1} \geq \frac{9n^2}{n^3+5n^3+2n^3+n^3} = \frac{9n^2}{9n^3} = \frac{1}{n}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$$

Teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ktorý je podľa **Tvrdenia 1** divergentný a preto je podľa porovnávacieho kritéria divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^4+3n+3}$

Riešenie:

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{n^2+4n}{n^4+3n+3} \leq \frac{n^2+4n^2}{n^4} = \frac{5n^2}{n^4} = \frac{5}{n^2}$$

Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^4+3n+3} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$, ktorý je podľa **Tvrdenia 1** konvergentný, je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n}{n^4+3n+3}$ a preto je podľa porovnávacieho kritéria konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n}{n^4+3n+3}$.

Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ nazývame **rad so striedavým znamienkom.**

Leibniz-ovo kritérium konvergencie radov so striedavým znamienkom:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ je rad so striedavým znamienkom. Ak:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, tzn. $a_{n+1} \le a_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ je konvergentný.

Príklad 5: Vyšetrite konvergenciu radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Riešenie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ je rad so striedavým znamienkom, pretože:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = -\sin\pi + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Keďže $0 < \frac{\pi}{n+1} \le \frac{\pi}{2}$, tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí**:** $\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > 0$.

Označme: $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Vyšetrime postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \sin 0 = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí**:**

$$\frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1}$$

Keďže $\sin x$ je na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ rastúca, tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme:

$$a_{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = a_n.$$

To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Obe podmienky Leibnizovho kritéria konvergencie radov so striedavým znamienkom sú splnené a preto je rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ konvergentný.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$

Riešenie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$ je rad so striedavým znamienkom, pretože pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí**:** $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) > 0$.

Označme: $a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$. Vyšetrime postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí**:**

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Keďže $\operatorname{arctg} x$ je funkcia rastúca na celom $\mathbb{R}$, tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme:

$$a_{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+1}\right) < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = a_n.$$

To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Obe podmienky Leibnizovho kritéria konvergencie radov so striedavým znamienkom sú splnené a preto je rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergentný.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Riešenie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$ je rad so striedavým znamienkom, pretože pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí**:** $\frac{1}{n} > 0$.

Označme: $a_n = \frac{1}{n}$. Vyšetrime postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí**:**

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Obe podmienky Leibnizovho kritéria konvergencie radov so striedavým znamienkom sú splnené a preto je rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergentný.

Poznámka:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergetný síce je, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ je divergentný.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ je konvergentný, nazývame **absolútne konvergentný**.
Konvergetný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverguje, nazývame **relatívne konvergentný**.
Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je príkladom relatívne konvergentného radu.

Tvrdenie 2:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ je konvergentný práve vtedy, keď $p > 0$.

Príklad 6: Vyšetrite konvergenciu radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Riešenie:

Podľa **Tvrdenia 2** je rad konvergentný, keďže príslušné $p = \frac{1}{2}$.

Nech f má v bode a derivácie všetkých rádov, tj. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje $f^{(n)}(a)$, potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

kde $f^{(0)}(a)$ rozumieme $f(a)$, nazývame **Taylorov rad** funkcie f v bode a.

Funkcia f sa nazýva (reálno-) **analytická** na okolí bodu a, ak jej Taylorov rad v bode a konverguje na tomto okolí k funkcií f $\left(\text{tj.} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$.

Príklad 8: Nájdite Taylorov rad funkcie $f(x) = e^x$ v bode $a = 0$.

Riešenie:

Pretože $(e^x)' = e^x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak $f^{(n)}(x) = e^x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Z toho vyplýva, že $f^{(n)}(a)$ existuje pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a platí: $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Uvedené samozrejme platí aj pre $n = 0$, pretože $f(0) = e^0 = 1$.

Taylorov rad funkcie f v bode $a = 0$ je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$, pretože pre každé reálne x platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n|x|}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)n!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$
$$= |x|.0 = 0 < 1$$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ máme:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Príklad 9: Nájdite Taylorov rad funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$ v bode $a = 0$. Nájdite približnú hodnotu $f\left(-\frac{1}{10}\right)$ z Taylorovho polynómu 3. rádu v bode $a = 0$.

Riešenie:

Z **príkladu 10** z **cvičenia 9** vieme, že $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ a $f^{(n)}(0) = n!$, kde $n \in \mathbb{N}$. Rovnako $f^{(n)}(0) = n!$ pre $n = 0$, pretože $f(0) = \frac{1}{1-0} = 1 = 0!$ Z toho vyplýva, že $f^{(n)}(a)$ existuje pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a Taylorov rad funkcie f v bode $a = 0$ je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Rad konverguje pre každé $x \in (-1,1)$, pretože platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n|x|}{|x|^n} = |x| < 1$$

práve vtedy, keď $x \in (-1,1)$. Pre všetky $x \in (-1,1)$ máme:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Taylorov polynóm 3. rádu z funkcie f v bode $a = 0$ je teda:

$$T_3(f, 0; x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

Odtiaľ:

$$T_3\left(f, 0; -\frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{1}{10} + \left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{9}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} = \frac{909}{1000} = 0{,}909$$

Teda $f\left(-\frac{1}{10}\right) \cong 0{,}909$ $\left(\text{na porovnanie skutočná hodnota } f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{\frac{11}{10}} = \frac{10}{11} = 0{,}\overline{90}\right)$.

Pozn.:

Ľahko ukážeme, že skutočne platí $f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ je totiž geometrický s $a = 1$ a kvocientom $q = -\frac{1}{10}$. Preto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{10}{11}$$

Príklad 10: Nájdite Taylorov rad funkcie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ v bode $a = 1$. Nájdite približnú hodnotu $f\left(\frac{4}{5}\right)$ z Taylorovho polynómu 2. rádu v bode $a = 1$.

Riešenie:

Potrebujeme nájsť predpis n-tej derivácie funkcie f. Napíšme najprv niekoľko prvých iterácií, aby sme mohli vysloviť hypotézu o $f^{(n)}$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = ((1+x)^{-1})' = -(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{(-1)^1 1!}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)' = (-(1+x)^{-2})' = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)' = (2(1+x)^{-3})' = -6(1+x)^{-4} = \frac{-6}{(1+x)^4} = \frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4}$$

Zrejme $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre $n \geq 2$ (pre $n = 1$ tvrdenie platí, ako vidno vyššie) urobme predpoklad $f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. Ukážeme, že z toho vyplýva $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = ((-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n})'$$

$$= -(-1)^{n-1}n(n-1)!\,(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Z toho dostávame:

$$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

Rovnako $f^{(n)}(a) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$ pre $n = 0$, pretože $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}}$.
Taylorov rad funkcie f v bode $a = 1$ teda je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}$$

Rad konverguje pre každé $x \in (-1,3)$, pretože platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(1-x)^{n+1}}{2^{n+2}}\right|}{\left|\frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{|x-1|^n}\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}|x-1| = \frac{1}{2}|x-1| < 1$$

práve vtedy, keď $x \in (-1,3)$. Pre všetky $x \in (-1,3)$ máme:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}$$

K uvedenému Taylorovmu radu funkcie f je možné dopracovať sa aj iným spôsobom a to takým, že využijeme, že pre všetky $x \in (-1,1)$ platí: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (**Príklad 9**):

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{2-(1-x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{(1-x)}{2}}$$

$$= \left| \text{označme } z = \frac{(1-x)}{2}, \text{podľa } \textbf{Príkladu 9} \text{ musí platiť: } |z| < 1; \text{z toho } \frac{1}{2}|x-1| < 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}$$

Takže pre všetky $x \in (-1,3)$ máme:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}$$

Taylorov polynóm 2. rádu z funkcie f v bode $a = 1$ je potom:

$$T_2(f,1;x) = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{4} + \frac{(1-x)^2}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2-2x}{8} + \frac{1-2x+x^2}{8} = \frac{7-4x+x^2}{8}$$

Odtiaľ:

$$T_2\left(f,1;\frac{4}{5}\right) = \frac{7-4\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2}{8} = \frac{7-\frac{16}{5}+\frac{16}{25}}{8} = \frac{7-\frac{64}{25}}{8} = \frac{111}{200} = 0{,}555$$

Teda $f\left(\frac{4}{5}\right) \cong 0{,}555$ $\left(\text{na porovnanie skutočná hodnota } f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9} = 0,\overline{5}\right)$.

Pozn.:

Ľahko nahliadneme, že skutočne platí $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{9} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)^n}{2^{n+1}}$. Máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Rad je teda geometrický s $a = \frac{1}{2}$ a kvocientom $q = \frac{1}{10}$. Preto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)^n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

Ďalšia literatúra k cvičeniu, z ktorej môžete čerpať, sa nachádza na stránke predmetu: http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC

Ide o súbor:

1. Riesene_priklady11-12.pdf

   http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC?action=AttachFile&do=get&target=Riesene_priklady11-12.pdf

Konkrétne si prejdite: **9.-16.príklad**.