# POSTUPNOSTI, NEKONEČNÉ RADY

**Príklad 1:** Určte nasledujúci člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak $a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 0{,}99$; $a_3 = 0{,}999$. Nájdite všeobecný predpis postupnosti $a_n$, tj. vyjadrite $a_n$ explicitne.

*Riešenie:*

Keďže:

$$a_1 = 0{,}9$$
$$a_2 = 0{,}99$$
$$a_3 = 0{,}999$$

zrejme $a_4 = 0{,}9999$. Explicitne $n$-tý člen postupnosti:

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

**Príklad 2:** Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^{n+1} + \cos(n\pi)$.

*Riešenie:*

Keďže $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, tak predpis $a_n$ možno upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$a_n = (-1)^{n+1} + \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n(-1+1) = 0.$$

Z toho vyplýva, že všetky prvky tejto postupnosti sú nulové a teda:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

**Príklad 3:** Upravte predpis postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{n}{2}$. Vypočítajte hodnotu $a_n$ pre $n = 498$.

*Riešenie:*

Súčet prvých $n$ členov aritmetickej postupnosti $\{k\}_{k=1}^{\infty}$, tj. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ je rovný:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z toho vyplýva, že:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{n+1-n-2}{n+2}\right) = \frac{-n}{2(n+2)}$$

Preto:

$$a_{498} = \frac{-498}{2(498+2)} = \frac{-498}{1000} = -0{,}498.$$

**Príklad 4:** Nech $q \in \mathbb{R}$ je také, že $q \neq 1$. Ukážte, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ súčtov prvých $n$ členov geometrickej postupnosti $\{q^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ má predpis $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Akú postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ súčtov prvých $n$ členov geometrickej postupnosti dostaneme pre $q = 1$?

*Riešenie:*

Pre $q \neq 1$ má postupnosť súčtov geometrickej postupnosti $\{q^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ nasledujúce členy:

$$s_1 = 1,$$
$$s_2 = 1 + q,$$
$$s_3 = 1 + q + q^2,$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1},$$
$$\vdots$$

Delením polynómov $q^n - 1$ a $q - 1$ pre $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ napr. Hornerovou schémou dostaneme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | ... | 0 | −1 |
| 1 | | 1 | ... | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | ... | 1 | 0 |

tj.:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1.$$

Skutočne teda pre $q \neq 1$ máme:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Pre $q = 1$ bude:

$$s_1 = 1,$$
$$s_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$s_3 = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$\vdots$$
$$s_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n-\text{krát}} = n,$$
$$\vdots$$

Teda pre $q = 1$ bude postupnosťou súčtov prvých $n$ členov geometrickej postupnosti aritmetická postupnosť, tj. $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Príklad 5:** Ukážte z definície, že limita postupnosti z **príkladu 1** je rovná 1, tj. že platí:

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1.$$

*Riešenie:*

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo $n_0$ také, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné reálne číslo a $n_0 \geq \lceil -\log \varepsilon \rceil$ (tj. horná celá časť z $-\log \varepsilon$). Poznamenajme, že ak $\varepsilon \geq 1$, tak $-\log \varepsilon \leq 0$ a teda za $n_0$ je možné vybrať 1. Pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí:

$$n > n_0 \geq \lceil -\log \varepsilon \rceil \geq -\log \varepsilon = \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Po úprave**:**

$$10^n > 10^{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Odtiaľ**:**

$$\varepsilon > \frac{1}{10^n} = \left|\frac{1}{10^n}\right| = \left|-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right| = \left|1-\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right| = \left|\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - 1\right| = |a_n - a|.$$

Keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, tvrdenie je dokázané.

**Príklad 6:** Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:

**a)** $a_n = \frac{-n}{2n+4}$

*Riešenie:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n\left(2+\frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2+\frac{4}{n}} = \frac{-1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{4}{n}} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

**b)** $a_n = \frac{8-4^n}{7^{n-1}2^{n+1}}$

*Riešenie:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8-4^n}{7^{n-1}2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(2-4^{n-1})}{4(14^{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{14^{n-1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}}{14^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{14}\right)^{n-1} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$
$$= 0 - 0 = 0$$

**c)** $a_n = \sqrt{n^2+3n} - n$

*Riešenie:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

**d)** $a_n = 5\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

*Riešenie:*

$$\lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = 5\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\right)$$
$$= 5\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\right)$$
$$= 5(1+0)^2\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\right) = 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{5}{2\cos 0} = \frac{5}{2}$$

**e)** $a_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1-3n}$

*Riešenie:*

Pri výpočte využijeme znalosť limity:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Počítajme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1-3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{(1-3n)\frac{4n}{4n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\frac{1-3n}{4n}}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3n}{4n}} = e^{-3/4}$$

**Príklad 7:** Nájdite súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - e^{-n+1}$$

*Riešenie:*

Označme $a_n = e^{-n} - e^{-n+1}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, ak má konečný súčet, tzn. ak postupnosť čiastočných súčtov radu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. Nájdime $n$-tý čiastočný súčet radu:

$$s_1 = a_1 = e^{-1} - e^0$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} = e^{-2} - e^0$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} + e^{-3} - e^{-2} = e^{-3} - e^0$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = e^{-1} - e^0 + e^{-2} - e^{-1} + \cdots + e^{-n} - e^{-n+1} = e^{-n} - e^0$$
$$\vdots$$

Teda $s_n = e^{-n} - e^0$, čo vieme ukázať matematickou indukciou.
Platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n} - e^0 = 0 - 1 = -1$$

Súčet radu je teda rovný $-1$.

**Príklad 8:** Nájdite súčet geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, ak $a \in \mathbb{R}$ a kvocient $q \in \mathbb{R}$ je taký, že $|q| < 1$.

*Riešenie:*

Označme $a_n = aq^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nájdime $n$-tý čiastočný súčet radu, pomôžeme si závermi z **príkladu 4**:

$$s_1 = a_1 = aq^0 = a$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = a + aq = a(1+q)$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a + aq + aq^2 = a(1+q+q^2)$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$
$$\vdots$$

Teda $s_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}q^n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q} - 0 = \frac{a}{1-q}$$

Súčet geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ s kvocientom $|q| < 1$ je rovný $\frac{a}{1-q}$.

**Príklad 9:** Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}$.

*Riešenie:*

Rad je geometrický s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ takým, že $|q| < 1$. Ukážeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^2 4^{n-1}}{5^{n-1}5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{5}\frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

Teda máme geometrický rad s $a = \frac{16}{5}$ a $q = \frac{4}{5}$. Podľa **príkladu 8** potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{\frac{16}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{5-4}{5}} = 16$$

Súčet tohto radu je teda rovný 16.

**Príklad 10:** Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}}$.

*Riešenie:*

Rad je geometrický s kvocientom $q \in \mathbb{R}$ takým, že $|q| < 1$. Ukážeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^4(-1)^{n-1}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Máme teda geometrický rad s $a = 3$ a $q = -\frac{1}{6}$. Podľa **príkladu 8** potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+3}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{3}{1+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{18}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{18}{7}$$

Súčet tohto radu je teda rovný $\frac{18}{7}$.

**Príklad 11:** Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7+2^n}{3^{n+1}}$.

*Riešenie:*

Na nájdenie súčtu tohto radu využijeme tvrdenie:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentný a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7+2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3^2 3^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}2}{3^2 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ je geometrický rad s $a = \frac{7}{9}$ a $q = \frac{1}{3}$ a má súčet:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{6}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ je geometrický rad s $a=\frac{2}{9}$ a $q=\frac{2}{3}$ a má súčet:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

Celkovo teda dostávame:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7+2^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{7}{6}+\frac{2}{3}=\frac{11}{6}$$

**Príklad 12:** Nájdite súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n-1}$$

*Riešenie:*

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n-1}$ nie je konvergentný, pretože nespĺňa nutnú podmienku konvergencie:

Ak nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentný, tak $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Vypočítajme:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n-1}$ je divergentný.

***Poznámka:***

Opačná implikácia k nutnej podmienke konvergencie vo všeobecnosti neplatí, tzn.: ak $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, to ešte neznamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentný.

**Ďalšia literatúra k cvičeniu**, z ktorej môžete čerpať, sa nachádza na stránke predmetu: http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC

**Ide o súbor:**

1. Riesene_priklady11-12.pdf

   http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC?action=AttachFile&do=get&target=Riesene_priklady11-12.pdf

Konkrétne si prejdite: **1.-8.príklad**.