Nekonečné číselné rady

Definícia.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Výraz* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sa nazýva nekonečný číselný rad. Číslo* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *nazýva n-tý čiastočný súčet radu. Postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva postupnosť čiastočných súčtov radu.*

Definícia. *Nekonečný číselný rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sa nazýva konvergentný, ak je konvergentná postupnosť čiastočných súčtov radu* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Číslo* $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *sa nazýva súčet radu. Ak je postupnosť čiastočných súčtov divergentná, tak rad sa nazýva divergentný.*

<u>Geometrický rad</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n\right)$

Veta. *Nech* $a \in R \setminus \{0\}$, $q \in R$. *Geometrický rad je konvergentný práve vtedy, keď* $|q| < 1$. *Súčet radu je* $s = \dfrac{a}{1-q}$.

Dôkaz. Nech $q \neq \pm 1, 0,\ a \in R$.
$\forall n \in N\colon s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\infty & q > 1 \\ \dfrac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q < -1 \end{cases}.$$

Ak $q = 1$, tak $s_n = na \implies \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = (\operatorname{sgn} a)\infty$.
Ak $q = -1$, tak $s_{2n} = 0,\ s_{2n-1} = a \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.
Vlastná limita postupnosti čiastočných súčtov radu existuje $\Longleftrightarrow |q| < 1$
$\Longrightarrow$ nekonečný číselný rad je konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$.

Veta. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú konvergentné rady a nech* $c \in R$. *Potom aj rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *sú konvergentné a platí:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Veta. *Nech* $k \in N$. *Rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *buď súčasne konvergujú alebo divergujú.*

Ak $s = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$, *tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + s$.

Veta (Nutná podmienka konvergencie).
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný, tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Dôkaz. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$, $a_n = s_n - s_{n-1}$ $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

Rady s nezápornými členmi

Ak $\forall n \in N\colon a_n \geq 0$, tak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesajúca, t.j. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in R_0^+ \cup \{\infty\}$.

Veta (Porovnávacie kritérium). *Nech* $\forall n \in N: 0 \leq a_n \leq b_n$. *Potom platí:*
(a) Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný rad, tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný rad.*
($\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sa nazýva majorantný rad k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*).*
(b) Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný rad, tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je divergentný rad.*

Dôkaz. (a) Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad a nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu. Postupnosť je neklesajúca a $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \in R \Rightarrow \forall n \in N\colon r_n \leq r$.
Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť je neklesajúca, $\forall n \in N : a_n \leq b_n \;\Rightarrow\; s_n \leq r_n \leq r$, t.j. zhora ohraničená $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R \;\Rightarrow$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Poznámka. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ je konvergentný, ak $\alpha > 1$, divergentný, ak $\alpha \leq 1$. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ sa nazýva harmonický rad.

Veta (D'Alembertovo limitné kritérium). *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi, nech* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ $(r \in R_0^+ \cup \{\infty\})$*. Potom platí:*
(a) Ak $0 \leq r < 1$*, tak je rad konvergentný.*
(b) Ak $r > 1$*, tak je rad divergentný.*

Veta (Cauchyho limitné kritérium). *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi, nech* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ $(r \in R_0^+ \cup \{\infty\})$*. Potom platí:*
(a) Ak $0 \leq r < 1$*, tak je rad konvergentný.*
(b) Ak $r > 1$*, tak je rad divergentný.*

Absolútna a relatívna konvergencia

Definícia. *Nekonečný číselný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sa nazýva absolútne konvergentný, ak* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je konvergentný rad.*

Veta. *Každý absolútne konvergentný rad je konvergentný.*

Veta (Leibnizovo kritérium pre rady so striedavými znamienkami).
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *je konvergentný rad.*

Definícia. *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentný, tak hovoríme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relatívne konvergentný rad.*

Mocninové rady

Definícia. *Nech* $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in R$. *Výraz*

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

sa nazýva mocninový rad. Číslo a *sa nazýva stred radu, čísla* $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *koeficienty radu.*

<u>Obor konvergencie mocninového radu O_K</u>: množina všetkých $x \in R$, pre ktoré daný rad konverguje.

Poznámka. Každý mocninový rad konverguje vo svojom strede, $a \in O_K$.

Veta.
1. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *konverguje v bode* $x_1 \neq a$, *tak konverguje* $\forall x \in R\colon |x-a| < |x_1 - a|$.
2. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *diverguje v bode* x_2, *tak diverguje* $\forall x \in R\colon |x_2-a| < |x - a|$.

Veta. *Pre mocninový rad nastáva práve jeden z nasledujúcich prípadov:*
1. rad konverguje len pre $x = a$ $(O_K = \{a\})$.
2. rad konverguje pre $\forall x \in R$ $(O_K = R)$.
3. $\exists \varrho \in (0,\infty)$ *také, že na intervale* $(a-\varrho, a+\varrho)$ *rad konverguje, na* $R \setminus \langle a-\varrho, a+\varrho\rangle$ *diverguje* $((a-\varrho, a+\varrho) \subset O_K \subset \langle a-\varrho, a+\varrho\rangle)$.

ϱ − polomer konvergencie radu
$I_K = (a-\varrho, a+\varrho)$ − interval konvergencie radu

Veta. *Nech* ϱ *je polomer konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a nech funkcia* $s\colon (a-\varrho, a+\varrho) \to R$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je súčet radu. Potom* s *je spojitá funkcia, má derivácie všetkých rádov a platí:*

$$\forall x \in (a-\varrho, a+\varrho)\colon \quad s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}, \ k \in N.$$