Príklady z matematiky 1

1 Prvý týždeň

1.0.1 Komplexné čísla.

V cvičeniach 1 - 5 určte goniometrický tvar komplexného čísla z, ak

1. $z = 3$. $[z = 3(\cos 0 + i \sin 0)]$
2. $z = -7$. $[z = 7(\cos \pi + i \sin \pi)]$
3. $z = 1 - i\sqrt{3}$. $\left[z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$
4. $z = -1 + i$. $\left[z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]$
5. $z = -2i$. $\left[z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$

   V cvičeniach 6 - 8 nájdite algebrický tvar komplexného čísla z

6. $z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. $\left[z = -1 + i\sqrt{3}\right]$
7. $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. $\left[z = \sqrt{3} + i\right]$
8. $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. $\left[z = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right]$

   Vypočítajte:

9. $\frac{2-3i}{3+4i}$. $\left[-\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i\right]$
10. $\frac{1+i}{1-i} + 2i^{19}$. $[-i]$
11. $2i - \frac{\overline{2-4i}}{2}$. $[-1]$
12. $(-1 + i)^4$. $[-4]$
13. $\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}$. $\left[\frac{1}{2^{12}}\right]$

    Vypočítajte $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, ak:

14. $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 3 + i$. $\left[z_1 \cdot z_2 = -2 + 16i,\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right]$
15. $z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. $\left[z_1 \cdot z_2 = 6i,\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + i\right)\right]$

    V nasledujúcich príkladoch vypočítajte riešenia binomickej rovnice v algebrickom tvare

16. $z^4 - 1 = 0$. $[1,\ i,\ -1,\ -i]$
17. $z^2 - i = 0$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right]$

18. $z^3 + 1 = 0$. $\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,i\right), -1, \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)\right]$

19. $z^3 - i = 0$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -i\right]$

1.0.2 Sústavy lineárnych rovníc.

1. Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2), \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sú

(a) stupňovité, [$\mathbf{A}, \mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$]

(b) redukované stupňovité? [$\mathbf{K}$ pre $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$]

2. Vypočítajte redukovanú stupňovitú maticu, ktorá je riadkovo ekvivaletná s maticou

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

3. Rozhodnite, či sú sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ ekvivaletné

(a) $\mathcal{S}_1 : \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & = & 2 \\ y_1 & + & 4y_2 & - & y_3 & = & 1 \end{array}$ [áno]

(b) $\mathcal{S}_1 : \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$, [nie]

Riešte sústavy lineárnych rovníc:

4. $\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 30 \\ 3x_1 & - & 13x_2 & + & 2x_3 & = & 21 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$, $[K = \{(2, -1, 1)\}]$

5. $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \end{array}$, $[K = \{(1 - 18t, 3 + 2t, -2 + 11t),\ t \in \mathbf{R}\}]$

6. $\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -10x_1 & + & 15x_2 & - & 11x_3 & = & 4 \end{array}$, [nemá riešenie]

7. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & & & = & 5 \end{array}$,

$\left[K = \left\{\left(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

8. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ 11x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$,

$\left[K = \left\{\left(-\frac{6}{7} + 8s, \frac{1}{7} - 13s, \frac{15}{7} - 6s, 7s\right),\ s \in \mathbf{R}\right\}\right]$

9. $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & -1 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 12x_3 & - & 4x_4 & + & 12x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}$, [nemá riešenie]

10. $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 8x_2 & + & 8x_3 & - & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 15 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 10 \end{array}$,

$\left[K = \left\{\left(0, -\frac{15}{8} - \frac{1}{4}s, -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}s, -5 + s, s\right),\ s \in \mathbf{R}\right\}\right]$

2 Druhý týždeň

2.0.3 Maticové operácie

1. Pre matice **A** až **P** vypočítajte:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=(-1,\ 0,\ 2),\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&2&0&5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&0&-3\\0&3&5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{O}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}=(2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

(a) $3\mathbf{E}+\mathbf{J}$ $\left[\begin{pmatrix}4&3\\3&-1\end{pmatrix}\right]$

(b) $2\mathbf{A}-3\mathbf{G}$ [nie je definované]

(c) $\mathbf{AD}$ $\left[\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&2&0&3\\-1&4&0&11\end{pmatrix}\right]$

(d) $\mathbf{PF}$ [11]

(e) $\mathbf{FP}$ $\left[\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\0&0&0&0\\6&0&-3&9\\8&0&-4&12\end{pmatrix}\right]$

(f) $\mathbf{K}^2$ $\left[\begin{pmatrix}\cos 2\alpha&-\sin 2\alpha\\\sin 2\alpha&\cos 2\alpha\end{pmatrix}\right]$

2. Riešte sústavu lineárnych rovníc

(a) $\begin{aligned}x-2y+2z&=-9\\3x-5y+4z&=10\\5x-12y+6z&=29\end{aligned}$ $\quad[(28,0,-\frac{37}{2})]$

(b) $\begin{aligned}x_1+2x_2-x_3&=2\\3x_1-x_2+2x_3&=7\\x_1\qquad-x_3&=-2\\2x_1+x_2+x_3&=7\end{aligned}$ $\quad[(1,2,3,)]$

(c) $\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &=& -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}$ [nemá riešenie]

3. Riešte sústavu lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a \in \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 6y & + & 2z & = & -4a-2 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 3a-6 \\ 2x & - & 33y & + & 6z & = & -21a \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} \emptyset \text{ pre } a \neq -2 \\ \left\{ \left(-24 - 15t,\, t,\, 15 + \frac{21}{2}t \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \text{ pre } a = -2 \end{array} \right]$$

4. Riešte sústavu lineárnych rovníc v závislosti od parametrov $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ 6x & - & 3y & + & bz & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} a = -2,\ b = -3 : K = \emptyset \\ a = -2, b \neq -3 : K = \left\{ \left(t,\, 1 - at - \frac{5}{b+3},\, \frac{5}{b+3} \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \\ a \neq -2, b \in \mathbf{R} : K = \left\{ \left(\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, 1 - t - a\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, t \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \end{array} \right]$$

5. Zistite aký je lineárny obal vektorov $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. [Lineárny obal je rovina $x_1 - x_2 + x_3 = 0$]

6. Dané sú vektory

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3.$$

(a) Zistite, či je ľubovoľný vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. [ano je]

(b) Zistite, či je vektor $\boldsymbol{v}_4$ lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ a ak áno vyjadrite vektor $\boldsymbol{v}_4$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ [$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$]

(c) Zistite, či lineárny obal $\langle v_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ je celý vektorový priestor $\boldsymbol{R}^3$. [ano je]

3 Tretí týždeň

3.0.4 Determinanty.

1. Vypočítajte inverznú maticu:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 2 & 7 & -10 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 & -12 \\ -6 & 9 & -9 & 6 \\ 8 & -4 & 8 & -8 \\ -6 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\right]$

(e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -11 & 11 & -11 \\ 7 & -10 & 12 \end{pmatrix}\right]$

2. Určte hodnosť matíc

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ [2]

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ [1]

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ [5]

(d) $\begin{pmatrix} 81 & 90 & 67 & 107 \\ 21 & 15 & 23 & 11 \\ 39 & 60 & 21 & 85 \\ 99 & 135 & 65 & 181 \\ 120 & 150 & 88 & 192 \end{pmatrix}$ [2]

3. Vzávislosti od parametrov a, $b \in \mathbf{R}$ určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -a \\ 2 & 2 & -a & 2 \\ 2 & -a & 2 & 2 \\ -a & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{c} 1,\ \text{ak } a = -2; \\ 3,\ \text{ak } a = 6; \\ 4,\ \text{ak } a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 6\} \end{array}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ a+b & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{l} 1,\ \text{pre } a = -b \\ 3,\ \text{pre } a \neq -b \end{array}\right].$

4. Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ [−7]

(b) $\begin{vmatrix} 2-i & -i \\ 3+i & 1-i \end{vmatrix}$ [0]

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ [−29]

5. Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,

$$\left[-2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right]$$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$,

$$\left[2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

6. Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & a \\ 4 & -1 & 0 & b \\ 3 & 0 & -2 & c \\ 3 & 6 & -1 & d \end{vmatrix}$ $[-51a + 84b - 75c - 3d]$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ [−6]

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [−10]

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 5 & 1 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [0]

(e) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ [6700]

7. Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

   (a) $\begin{aligned} 3x-4y+5z&=\ \ 1 \\ 2x-3y+\ z&=-1 \\ 3x-5y-\ z&=\ \ 2 \end{aligned}$ $[(-59\,, -37,\, 6)]$

   (b) $\begin{aligned} ax+\ \ \ y+z&=4 \\ x+\ by+z&=3 \\ x+2by+z&=4 \end{aligned}$; $a, b \in \mathbf{R}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 1,\ b \neq 0\ :\ \left\{\dfrac{1}{b(1-a)}(1-2b, 1-a, 4b-2ab-1)\right\} \\ a = 1,\ b = \dfrac{1}{2}\ :\ \{(2-t, 2, t); t \in \mathbf{R}\} \\ a \in \mathbf{R}, b = 0\ :\ \emptyset \\ a = 1, b \neq \dfrac{1}{2}\ :\ \emptyset \end{array}\right]$

4 Štvrtý týždeň

4.0.5 Polynómy.

1. Vynásobte polynómy: $(3x^3+(1-i)x^2+ix-2+i)(3x^3+(1+i)x^2-ix-2-i)$.
   $\left[9x^6+6x^5+2x^4-14x^3-5x^2+2x+5\right]$

2. Vydeľte so zvyškom:

   (a) $(2x^4-3x^3+4x^2-5x+6):(x^2-3x+1)$.
   $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^2+3x+11 \\ \text{zvyšok: } 25x-5\end{array}\right]$

   (b) $\left(2ix^6+(2-2i)x^5-ix^4+x^3-x^2\right):(ix^3+(1-i)x^2+1)$
   $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^3-x-1 \\ \text{zvyšok: } -ix^2+x+1\end{array}\right]$

   (c) $(x^3-x^2-x):(x-1+2i)$
   $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } x^2-2ix-5-2i \\ \text{zvyšok: } -9+8i\end{array}\right]$

3. Vydeľte so zvyškom pomocou Hornerovej schémy :

   (a) $(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)$
   $\left[(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5\right]$

(b) $(4x^3 + x^2) : (x + 1 + i)$
$\left[(x + 1 + i)(4x^2 - (3 + 4i)x - 1 + 7i) + 8 - 6i\right]$

(c) $(3x^4 + (1 - 3i)x^3 - 2ix^2 + ix - i) : (x - i)$
$\left[(x - i)(3x^3 + x^2 - ix + 1 + i) - 1\right]$

4. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte $f(c)$:

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ c = 4$ [136]

   (b) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ c = -2 - i$ $[-1 - 44i]$

5. Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

   (a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8,\ c = 2$ [dvojnásobný]

   (b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$ [trojnásobný]

   (c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$ [štvornásobný]

   (d) $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1.\ c = i$ [trojnásobný]

6. Nájdite racionálne korene polynómov:

   (a) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4.$ $\left[-\frac{2}{3},\ 2\right]$

   (b) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24.$ [nemá racionálne korene]

   (c) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6.$ $\left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$

   (d) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$ $[-1$ – štvornásobný, $3]$

7. Nájdite ostatné korene polynómu, ak poznáte jeden koreň:

   (a) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0,\ 1 - i.$
   $\left[1 \pm i,\ -1 \pm \sqrt{3}\right]$

   (b) $4x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 71x^2 + 16x - 20 = 0,\ 2 + i.$
   $\left[2 \pm i,\ \pm 2i,\ \pm\frac{1}{2}\right]$

   (c) $x^6 - x^5 - 13x^3 + 9x^2 + 8x + 20 = 0,\ -1 + 2i$
   $\left[-1 \pm 2i,\ 2 \text{ -dvojnásobný},\ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$

8. Nájdite kanonický rozklad polynómov nad $\mathbf{C}$:

   (a) $ix^3 + 1.$
   $\left[i(x + i)\left(x - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\right)\right]$

(b) $x^4 - 1$.
$[(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)]$

(c) $3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x - 3$.
$\left[3(x+1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})\right]$

9. Nájdite kanonický rozklad polynómov nad **R**:

(a) $x^4 + 4$.
$\left[(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\right]$

(b) $x^6 - 8$.
$\left[(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+2)(x^2-\sqrt{2}x+2)\right]$

(c) $4x^4 + x^2 + 1$.
$$\left[4\left(x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

(d) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1$.
$$\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2-x+1)\right]$$

4.1 Racionálne funkcie a elementárne zlomky.

1. Rozložte na elementárne zlomky nad **C** rýdzoracionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{4}{x^4-1}$.
$$\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{i}{x-i}-\frac{i}{x+i}\right]$$

(b) $\dfrac{x^3+3x^2+(3+i)x+2}{(x+1)^3(x-i)}$.
$$\left[\frac{i}{(x+1)^3}+\frac{1}{x-i}\right]$$

(c) $\dfrac{4x^2-12x+4}{(x^2-2x+2)^2}$.
$$\left[\frac{2-i}{(x-1+i)^2}+\frac{2+i}{(x-1-i)^2}\right]$$

(d) $\dfrac{4x-i}{2x^3+2i}$.
$$\left[\frac{-i}{2(x-i)}+\frac{\sqrt{3}+i}{2x-\sqrt{3}+i}+\frac{-\sqrt{3}+i}{2x+\sqrt{3}+i}\right]$$

2. Rozložte na elementárne zlomky nad **R** racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$.

$\left[\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}\right]$

(b) $\dfrac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$.

$\left[x+1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x-6}{(x^2-2x+2)^2}+\dfrac{2}{x^2-2x+2}\right]$

(c) $\dfrac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$.

$\left[x-1+\dfrac{6}{(2x-1)^2}-\dfrac{10}{2x-1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}\right]$

(d) $\dfrac{x^6+x^5}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$.

$\left[x+\dfrac{x-1}{3(x^2+x+1)^2}+\dfrac{-11x+5}{9(x^2+x+1)}+\dfrac{2}{9(x-1)}\right]$

(e) $\dfrac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$.

$\left[\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2+x+1}\right]$

5 Piaty týždeň

1. Nájdite bod, v ktorom priamka prechádzajúca bodmi $A=(3,-2,7)$ a $B=(13,3,-8)$ pretína rovinu xz. $[(7,0,1)]$

2. Ukážte, že body $(2,1,4)$, $(1,-1,2)$, $(3,3,6)$ ležia na priamke.

3. Ak $A=(2,3,-1)$ a $B=(3,7,4)$ nájdite bod P na priamke AB spĺňajúci $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{2}{5}$. $\left[\left(\frac{16}{7},\frac{29}{7},\frac{3}{7}\right) \text{ a } \left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{13}{3}\right)\right]$

4. Nech $p\equiv A\overrightarrow{BC}$, kde $A=(1,2,3)$, $B=(-2,2,0)$, $C=(4,-1,7)$ a $q\equiv E\overrightarrow{EF}$, kde $E=(1,-1,8)$, $F=(10,-1,11)$. Zistite, či sa p a q pretínajú a vypočítajte ich priesečník. $[(7,-1,10)]$

5. Ukážte, že trojuholník určený bodmi $(-3,5,6)$, $(-2,7,9)$ a $(2,1,7)$ má vnútorné uhly $30°$, $60°$, $90°$.

6. Určte bod na priamke AB najbližší ku začiatku súradnicovej sústavy a určte ich vzdialenosť, ak $A=(-2,1,3)$ a $B=(1,2,4)$. $\left[\left(-\frac{16}{11},\frac{13}{11},\frac{35}{11}\right),\ \sqrt{\frac{150}{11}}\right]$

7. Priamka p je určená dvomi rovinami $x+y-2z=1$ a $x+3y-z=4$. Nájdite bod P na p najbližšie k bodu $C=(1,0,1)$ a $|PC|$. $\left[\left(\frac{4}{3},\frac{17}{15},\frac{11}{15}\right), \frac{\sqrt{330}}{15}.\right]$

8. Nájdite rovnicu roviny kolmej na priesečnicu rovín $x+y-2z=4$ a $3x-2y+z=1$, ktorá prechádza bodom $(6,0,2)$. $[3x+7y+5z=28]$

9. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej bodom $A=(3,-1,2)$, ktorá je kolmá na priamku p prechádzajúcu bodmi $B=(2,1,4)$ a $C=(-3,-1,7)$. Nájdite tiež priesečník priamky p s touto rovinou a zistite vzdialenosť bodu A od priamky p. $\left[5x+2y-3z=7,\ \left(\frac{111}{38},\frac{52}{38},\frac{131}{38}\right), \sqrt{\frac{293}{38}}\right]$

10. Bod B je päta kolmice z bodu $A=(6,-1,11)$ na rovinu $3x+4y+5z=10$. Vypočítajte B a vzdialenosť $|AB|$. $\left[B=\left(\frac{123}{50},\frac{286}{50},\frac{255}{50}\right), |AB|=\frac{59}{\sqrt{50}}.\right]$

11. Vypočítajte plošný obsah trojuholníka s vrcholmi v bodoch $(-3,0,2)$, $(6,1,4)$, $(-5,1,0)$. $\left[\frac{\sqrt{333}}{2}\right]$

12. Určte rovnicu roviny prechádzajúcu bodmi $(2,1,4)$, $(1,-1,2)$, $(4,-1,1)$. $[2x-7y+6z=21.]$

13. Ak p je priamka prechádzajúca bodmi $A=(1,2,1)$ a $C=(3,-1,2)$, a q je priamka prechádzajúca bodmi $B=(1,0,2)$ a $D=(2,1,3)$, ukážte, že najkratšia vzdialenosť medzi p a q sa rovná $\frac{13}{\sqrt{62}}$.

14. Body $A=(1,1,5)$, $B=(2,2,1)$, $C=(1,-2,2)$ a $D=(-2,1,2)$ sú vrcholy štvorstena. Nájdite rovnicu priamky prechádzajúcej bodom A kolmej na stenu BCD a vzdialenosť bodu A od tejto steny. Vypočítajte tiež najmenšiu vzdialenosť medzi mimobežkami AD a BC. $\left[P=(1+t)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}),\ 2\sqrt{3},\ 3.\right]$

15. Ukážte, že objem štvorstenu s vrcholmi $A_i=(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3,4$, sa rovná $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

6 Šiesty týždeň

1. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}+\log\left(1-x^2\right)$. $[D(f)=(-1,0)\cup(0,1)]$
2. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\ln\left(1-\log\left(x^2-5x+16\right)\right)$. $[D(f)=(2,3)]$
3. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$. [Funkcia nie je nikde definovaná]
4. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$. $[D(f)=\mathbf{R}]$
5. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\ln\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$. $[D(f)=(4,5)\cup(6,\infty)]$
6. Daná je funkcia $f(x)=\log\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$. Nájdite

(a) definičný obor funkcie, $\left[D(f) = \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)\right]$

(b) všetky reálne čísla, pre ktoré je $f(x) > 0$. [Ak $x \in (-1, 0) \cup (2, \infty)$, potom $f(x) > 0$.]

7. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{x}{\log(1-x)}$. $[D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, f ani párna ani nepárna$]$

8. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = x\left[\log(x+1) - \log x\right]$. $[D(f) = (0, \infty)$, f ani párna ani nepárna$]$

9. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$. $\left[D(f) = \cup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, \text{ párna}\right]$

10. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, $a > 0$. $[D(f) = \mathbf{R}$, nepárna funkcia$]$

7 Siedmy týždeň

1. Pre funkciu $f(x) = |x|$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = \mathbf{R}, \text{ na } (-\infty, 0) \text{ je klesajúca, na } (0, \infty) \text{ je rastúca, zdola} \\ \text{ohraničená } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(0) = 0, \text{ nie je zhora ohraničená} \end{array}\right]$$

2. Pre funkciu $f(x) = |x| - x$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = \mathbf{R},\ f(x) = |x| - x = \left\{\begin{array}{ccc} -2x & \text{pre} & x < 0 \\ 0 & \text{pre} & x \geq 0 \end{array}\right., \text{ na } (-\infty, 0) \text{ je klesajúca,} \\ \text{na } (0, \infty) \text{ je konštantná, zdola ohraničená } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 0. \end{array}\right]$$

3. Pre funkciu $f(x) = 1 - \cos x$ určte definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená, nájdite jej supremum, infimum, maximum, minimum a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = \mathbf{R}, \text{ na intervaloch } (2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ je rastúca,} \\ \text{na intervaloch } (-\pi + 2k\pi, 2k\pi) \text{ je klesajúca, } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(2k\pi) = 0, \\ \max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(\pi + 2k\pi) = 2. \end{array}\right]$$

4. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu, ak $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = \mathbf{R}, H(f) = \langle 1, \infty), \text{ zdola ohraničená } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(0) = 1. \\ \text{Nie je prostá, preto nemá inverznú funkciu.} \end{array}\right]$$

5. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = -4 + 3\sqrt{x}$.

$$\left[D(f) = \langle 0, \infty), H(f) = \langle -4, \infty), \text{ je prostá } f^{-1} : \langle -4, \infty) \longrightarrow \langle 0, \infty), \ f^{-1}(x) = \left(\tfrac{x+4}{3}\right)^2\right]$$

6. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = 1 + \ln(x+2)$.

   $\left[D(f) = (-2,\infty), H(f) = \mathbf{R},\right.$ je prostá $f^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow (-2,\infty)$, $f^{-1}(x) = -2 + e^{x-1}.\left.\right]$

7. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$. [9]

8. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. [0]

9. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. [6]

10. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. [$+\infty$]

11. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x) = \frac{1}{|x^2-16|}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf. [Funkcia nie je definovaná v bodoch, kde je $\left|x^2-16\right| = 0$, t.j. $x_{1,2} = \pm 4$. Tak máme $D(f) = (-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,\infty) = \mathbf{R} \setminus \{-4,4\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a = -4$. Limity v bode $a = 4$ vypočítame podobne: $\lim_{x\longrightarrow -4^-} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow -4^+} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je zhora ohraničená. Pretože platí $\frac{1}{|x^2-16|} > 0$, funkcia f je zdola ohraničená.]

12. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf.[Funkcia nie je definovaná v bodoch, kde je $x^2-4 = 0$, t.j. $x_{1,2} = \pm 2$. Tak máme $D(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty) = \mathbf{R} \setminus \{-2,2\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a = -2$. Limity v bode $a = 2$ vypočítame podobne. $\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je zdola ani zhora ohraničená.]

13. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

14. Daná je funkcia $f(x) = \frac{x}{|\operatorname{tg} x|}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

    (a) Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a v bode 0.
    $\left[\lim_{x\longrightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{x}{|\operatorname{tg} x|} = -\infty,\ \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{|\operatorname{tg} x|} = \infty,\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x}{|\operatorname{tg} x|} = 1,\ \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x}{|\operatorname{tg} x|} = -1.\right]$

    (b) Zistite, či je daná funkcia párna, alebo nepárna. [nepárna]

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. [$-1$]

16. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

17. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. [$-1$]

18. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$. [$-\infty$]

19. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$. $\left[\frac{5}{6}\right]$

20. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Platí nerovnica:} \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \Longrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{pre } x > 0, \\ \text{potom z vetyo nerovnostiach medzi limitami platí} : \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \end{array}\right]$$

21. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$. [1]

8 Ôsmy týždeň

1. Zistite, či je funkcia $f(x) = 5x^2 + 2x - 6$ spojitá v bode $a = -3,\ 0,\ 1$. [Je spojitá]

2. Zistite, či je funkcia $f(x) = |6x+3|$ spojitá v bode $a = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^-} |6x+3| = \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^-} -6x-3 = 0. \\ \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^+} |6x+3| = \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^+} 6x+3 = 0. \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^-} |6x+3| = \lim_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^+} |6x+3| = f\left(-\frac{1}{2}\right). \end{array}\right]$$

3. Zistite, či je funkcia $f(x) = \sqrt{3-x^2}$ zľava (sprava) spojitá v bode $a = \sqrt{3}$. [Funkcia $f(x) = \sqrt{3-x^2}$ má definičný obor $D(f) = \left\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\rangle$. Máme: $f\left(\sqrt{3}\right) = 0$, $\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-} \sqrt{3-x^2} = 0$, teda f je v bode $\sqrt{3}$ spojitá zľava. Vzhľadom na definičný obor $\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^+} f(x)$ nemá zmysel, teda f je zľava spojitá v bode $a = \sqrt{3}$.]

4. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ spojitá na intervale $(0,\infty)$. [Pre každé $a \in (0,\infty)$ máme $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin a}{a} = f(a)$.Funkcia je spojitá na $(0,\infty)$.]

5. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ spojitá na intervale $\langle 1,3)$, alebo na $(1,3\rangle$. [$f = \frac{h}{g}$, kde $h : \langle 1,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \sqrt{x-1}$, $g : (-\infty,3) \longrightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$,sú spojité, potom $f : \langle 1,3) \longrightarrow$, $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$je podiel dvoch spojitých funkcií, teda je spojitá, alebo to ukážeme takto: $\forall x \in \langle 1,3)$ platí: $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{3-a}} = f(a)$.]

6. Zistite, či je funkcia f spojitá v bode a a načrtnite jej graf ak:

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x \in \langle 0,1\rangle \\ 4-2x & x \in \left(1,\frac{5}{2}\right) \\ 2x-7 & x \in \left(\frac{5}{2},\infty\right) \end{cases},\ a = 1,\ \frac{5}{2}.$$

[V bode $a = 1$ je spojitá, v bode $a = \frac{5}{2}$ nie je definovaná, teda ani spojitá.]

7. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{(x-1)^2-1}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\mathbf{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\text{ .Funkcia } f \text{ je spojitá.} \\ \lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-1)^2-1}{x-2} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2. \\ \text{Hľadaná spojitá funkcia je daná predpisom} \\ F: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{pre} & x \neq 2 \\ 2 & \text{pre} & x = 2 \end{array} \right. . \end{array}\right]$$

8. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\mathbf{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F. [$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ .Nedá sa rozšíriť aby bola spo

9. Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 8e^{px} & x < 0 \\ p - 3x & x \geq 0 \end{array} \right. ,$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. [$p = 8$]

10. Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} & x \neq 0 \\ p^2 + 2p - 2 & x = 0 \end{array} \right. ,$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. [$p = -3 \vee p = 1$]

11. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{x-3}$ spojitá a ohraničená na intervale $\langle 0, 3)$.[Nie je]

12. Zistite, či je funkcia $f(x) = |4x - 8|$ spojitá na intervale $\langle -1, 4\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 8 - 4x & \text{pre} & x \in \langle -1, 2) \\ 4x - 8 & \text{pre} & x \in \langle 2, 4\rangle \end{array} \right. \text{, spojitá,} \\ \min_{x \in \langle -1, 4\rangle} f(x) = 0 = f(2),\ \max_{x \in \langle -1, 4\rangle} f(x) = 12 = f(-1)\,. \end{array}\right]$$

13. Zistite, či je funkcia $f(x) = \sqrt{|x|}$ spojitá na intervale $\langle -3, 2\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

[Je spojitá, $\min_{x \in \langle -3, 2\rangle} f(x) = 0, \max_{x \in \langle -3, 2\rangle} f(x) = \sqrt{3}$.]

9 Deviaty týždeň

1. Vypočítajte derivácie funkcií:

$$f_1(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)},\ f_2(x) = 4^{3x},\ f_3(x) = \ln\frac{5+4x}{3+7x},\ f_4(x) = x10^{-x},\ f_5(x) = \ln\sin 2x.$$

$$\left[\begin{array}{c} f'_1(x) = \frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)}}, f'_2(x) = 3.\ln 4.4^{3x}, \\ f'_3(x) = -\frac{23}{(3+7x)(5+4x)}, f'_4(x) = 10^{-x}(1-x\ln 10),\ f'_5(x) = 2\operatorname{cotg} 2x. \end{array}\right]$$

2. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

diferencovateľná v bodoch $a = 0,\ \frac{2}{\pi}$.

[V bode $a = 0$ platí: $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{x}\nexists$.V bode $a = \frac{2}{\pi}$ nemusíme deriváciu počítať z definície, ale stačí pre $x \neq 0$ nájsť : $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},\ f'\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1$.]

3. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

v bode $a = 0$ a) spojitá, b) diferencovateľná.

[a) je spojitá v bode $a = 0$, b) nie je diferencovateľná v bode $a = 0$.]

4. Pre funkciu $f(x) = |2x-6|$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'. $$\left[\begin{array}{c} f(x) = |2x-6| = \begin{cases} 6-2x & \text{pre} & x < 3 \\ 2x-6 & \text{pre} & x \geq 3 \end{cases}, \\ f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{pre} & x < 3 \\ 2 & \text{pre} & x > 3 \end{cases},\ \left.\begin{array}{l} f'_+(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{2x-6}{x-3} = 2 \\ f'_-(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{6-2x}{x-3} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(3)\nexists. \end{array}\right]$$

5. Pre funkciu $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'. $\left[f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{pre} & x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{pre} & x > 1 \end{cases}, f'(1)\nexists.\right]$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$. $[A = (0,1),\ t : x + y - 1 = 0,\ n : x - y + 1 = 0]$

7. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{1-x^2}$ v priesečníku s priamkou $y = 1$. [Úloha má dve riešenia: v bode $T_1 = (1,1) : t_1 : 2x + y - 3 = 0,\ n_1 : x - 2y + 1 = 0$, v bode $T_2 = (-1,1) : t_2 : 2x - y + 3 = 0,\ n_2 : x + 2y - 1 = 0$.]

8. Ku grafu funkcie $f(x) = x \ln x$ nájdite rovnicu normály, ktorá je rovnobežná s priamkou $p : 2x - 2y + 3 = 0$. $\left[n : y - x + 3e^{-2} = 0\right]$

9. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií $f(x) = \ln x$ a $g(x) = \ln^2 x$. [Návod: najskôr určte priesečník funkcií f a g, potom použite vzťah $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, kde k_1, k_2 sú smernice dotyčníc ku grafom funkcie f resp. g v ich priesečníku. Výsledok: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{e}{e^2+2}$.]

10 Desiaty týždeň

1. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$.

   $$\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)} = -1.\right]$$

2. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. [1]

3. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x$. [1]

4. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. $\left[-\frac{4}{\pi}\right]$

5. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. [1]

6. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to a} \left[\frac{\sin x}{\sin a}\right]^{\operatorname{cotg}(x-a)}$. $\left[e^{\operatorname{cotg} a}\right]$

7. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, spojitá, $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$, priamka $x = 1$ je vertikálna asymptota.

   2) Platí $-1 \in D(f) \Rightarrow 1 \notin D(f)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

   3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

   4) $f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$ klesajúca, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

   5) $f(0) = -1 = \operatorname{lokmin} f(x) = \min_{x\in D(f)} f(x)$.

   6) $f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$, ak $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ $f''(x) < 0$ konkávna, ak $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ $f''(x) > 0$ konvexná, ak $x \in (1, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

   7) V bode $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$ je inflexný bod.

   8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode ∞ aj $-\infty$. $H(f) = \langle -1, \infty)$.]

8. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = \langle 0, \infty)$, $f(1) = 0$, spojitá, nemá vertikálnu asymptotu.

   2) Platí $D(f) = \langle 0, \infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, ak $x \in (0, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

5) $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \max_{x \in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x) = \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}(1+x)^2}$, ak $x \in (0, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

7) Nemá inflexný bod.

8) $\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2}$. Priamka $y = -\frac{\pi}{2}$ je asymptota v bode ∞. $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.]

9. Zistite priebeh funkcie $f(x) = x^2 - 2|x|$ a načrtnite jej graf.

[1) $f(x) = x^2 + 2x$ pre $x \in (-\infty, 0)$ $x^2 - 2x$ $x \in \langle 0, \infty)$, $D(f) = \mathbf{R}$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, spojitá, nemá vertikálne asymptoty.

2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$, teda definičný obor je symetrický podľa začiatku a $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = f(x)$. Funkcia je párna.

3) Pretože má tri nulové body (viď 1)) nie je periodická. (Ak by bola periodická musela by mať nekonečne mnoho nulových bodov.)

4) $f'(x) = 2x+2$ pre $x \in (-\infty, 0)$ $2x-2$ $x \in \langle 0, \infty)$, $f'_+(0) = -2$, $f'_-(0) = 2$, $f'(0) \nexists$, ak $x \in (-\infty, -1)$ $f'(x) < 0$ klesajúca, ak $x \in (-1, 0)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) < 0$ klesajúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) > 0$ rastúca.

5) $f(0) = 0 = \operatorname{lokmax} f(x)$, $\quad f(-1) = f(1) = -1 = \min_{x \in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x) = 2$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f''(x) > 0$ konvexná, ak $x \in (0, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

7) Nemá inflexný bod.

8) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 2|x| = \infty$. Pre asymptotu v bode $-\infty$ máme: $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x} = -\infty$, funkcia f nemá asymptotu v bode $-\infty$. Pre asymptotu v bode ∞ máme: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x} = \infty$, funkcia f nemá asymptotu v bode ∞. $H(f) = \langle -1, \infty)$.]

10. Zistite priebeh funkcie $f(x) = -1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$ a načrtnite jej graf.

[1) $D(f) = \langle -5, 1\rangle$, $f(-2 - 2\sqrt{2}) = 0$, $f(-2 + 2\sqrt{2}) = 0$ spojitá (zložená funkcia), nemá vertikálnu asymptotu.

2) Platí $D(f) = \langle -5, 1\rangle$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

3) Nie je periodická.

4) $f'(x) = \frac{-x-2}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$ existuje na $(-5, 1)$, ak $x \in (-5, -2)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (-2, 1)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

5) $f(-2) = -1 + \sqrt{9} = 2 = \max_{x \in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x) = \frac{-9}{(\sqrt{-x^2-4x+5})^3}$ existuje na $(-5, 1)$, ak $x \in (-5, 1)$ $f''(x) < 0$ konkávna.

7) Nemá inflexný bod.

8) $f(-5) = -1$, $f(1) = -1$. Pretože $D(f)$ neobsahuje body $\pm\infty$, nemá zmysel skúmať asymptoty v týchto bodoch. $H(f) = \langle -1, 2\rangle$.]

11. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ a načrtnite jej graf.

    [1) $D(f) = (0, \infty)$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, spojitá (podiel dvoch spojitých).

    2) Platí $D(f) = (0, \infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

    3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

    4) $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

    5) $f(1) = 1 = \max_{x \in D(f)} f(x)$.

    6) $f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$, ak $x \in (0, e^{\frac{1}{2}})$ $f''(x) < 0$ konkávna, ak $x \in (e^{\frac{1}{2}}, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

    7) V bode $x = e^{\frac{1}{2}}$, $f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ je inflexný bod.

    8) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln x + 1 = -\infty$. Priamka $x = 0$ je vertikálna asymptota funkcie. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Priamka $y = 0$je asymptota v bode ∞. $H(f) = (-\infty, 1\rangle$.]

12. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

13. Zistite priebeh funkcie $f(x) = (1 - 3x)\, e^{2x}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

14. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

15. Zistite priebeh funkcie $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

16. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

17. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

18. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

19. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

20. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

21. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln \cos x$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

11 Jedenásty týždeň

1. Zistite, či postupnosť $\left\{\frac{3^n+3}{1-4.2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

   $\left[\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3}{1-4.2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{1+\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{2^n}-4}=-\infty.\text{ Diverguje.}\right]$

2. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt{1+n^2}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

   $\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)=0.\text{ Konverguje}\right]$

3. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

   $\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)=\frac{1}{2}.\text{ Konverguje.}\right]$

4. Zistite, či postupnosť $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

   $\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.\text{ Konverguje.}\right]$

5. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt[n]{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

   $\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5n}\right)=1.\text{ Konverguje.}\right]$

6. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Nájdite } n-\text{tý čiastočný súčet. Máme:}\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+4)}\right),\\ s_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right),\\ s_2=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right],\\ s_3=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\right],\\ s_4=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\right],\\ \ldots,\\ s_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right],\\ \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{13}{36},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{13}{36}.\end{array}\right]$$

7. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+2}}\right)$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Nájdite } n-\text{tý čiastočný súčet.}\\ s_n=e+e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n+2}},\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+2}}\right)=e+e^{\frac{1}{2}}-2.\end{array}\right]$$

8. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Nájdite } n-\text{tý čiastočný súčet.}\\ s_1=\ln 2,\\ s_2=\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\ln 3,\\ \ldots,\\ s_n=\ln(n+1),\\ \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty.\\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \text{ diverguje.}\end{array}\right]$$

9. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+5}$.
[Porovnávacie kritérium. Konverguje.]

10. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. $\left[\begin{array}{c}\text{Limitné porovnávacie kritérium.}\\ \text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ konverguje } (p = \frac{3}{2} > 1).\\ \text{Platí: } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1 > 0. \text{ Konverguje.}\end{array}\right]$

11. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. [Limitné porovnávacie kritérium. Diverguje.]

12. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$. [Limitné porovnávacie kritérium. Diverguje.]

13. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$. [Limitné porovnávacie kritérium. Konverguje.]

14. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.
[Podielové kritérium. Diverguje.]

15. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
[Podielové kritérium. Konverguje.]

16. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.
$$\left[\begin{array}{c}\text{Podielové kritérium}\\ \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{2\pi}{2^{n+1}}} =\\ = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1.\text{Konverguje.}\end{array}\right]$$

17. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n+1}}$.
[Podielové kritérium. Konverguje.]

18. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^n$. [Odmocninové kritérium. Konverguje.]

19. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$.
[Odmocninové kritérium. Diverguje.]

20. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.
[Odmocninové kritérium. Konverguje.]

21. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(2n+1)}$.
$$\left[\begin{array}{c}\text{Kritérium pre rady sostriedavými znamienkami.}\\ a_n = \frac{1}{\ln 2n+1} > \frac{1}{\ln 2n+3} = a_{n+1},\\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln 2n+1} = 0.\\ \text{Konverguje.}\end{array}\right]$$

22. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

[Kritérium pre rady so striedavými znamienkami. Konverguje.]

23. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Podľa kritéria pre rady so striedavými znamienkami rad konverguje.}\\ \text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{ diverguje podľa porovnávacieho kritéria.}\\ \text{To znamená, že rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ konverguje relatívne.}\end{array}\right]$$

24. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

[Konverguje absolútne.]

25. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$.

$\left[\text{Rad diverguje. } \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.\right]$

26. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$.

[Rad absolútne konverguje.]

Riešenie A

Teória

1. Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná n, inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}\exists$, $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

2. Napíšte aký je vzťah medzi determinantami: $D_2 = \alpha D_1$

3. Nech $f, g : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}, a$ je hromadný bod množiny A a nech platí $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = M \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Potom existuje $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \longrightarrow a} f(x)}{\lim_{x \longrightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$.

4. (Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie) Nech I je interval a $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Nech je f diferencovateľná vnútri intervalu I. Potom f je neklesajúca (nerastúca) na intervale I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ vnútri intervalu I. Naviac f je rastúca (klesajúca) na I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ a $f'(x) \not\equiv 0$ na žiadnom otvorenom podintervale intervalu I.

   $y = kx + q : k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$.

Príklady

1. $\frac{-2x^4-6x^3-12x^2+2}{(x^2+x+1)(x-2)(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{2x-2}{x+x^2+1}$

2. (a)
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & -x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

3. (a) $\lim_{x \to -2} \frac{\left(4-x^2\right)}{\sqrt{6+x}-2} = \lim_{x \to -2} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{6+x}-2} \frac{\sqrt{6+x}+2}{\sqrt{6+x}+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)}{x+2} = 16$.

   (b) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \cos x - \sin\left(x^2\right) + \arcsin\left(\sqrt{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \cos x\right) - \frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)\right) + \frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(\sqrt{x}\right)\right) = = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x - 2x \cos x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

   1) $D(f) = \mathbf{R}$, $f(0) = 0$, spojitá.

2) Platí $-x \in D(f) \Rightarrow x \in D(f)$. $f(-x) = \frac{(-x)^2}{4+(-x)^2} = \frac{x^2}{4+x^2} = f(x)$. Funkcia je párna.

3) Pretože má jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4)-5) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

ak $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) < 0 \searrow$

ak $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 = \min_{x\in\mathbf{R}} f(x)$

ak $x \in (0, \infty)$ $f'(x) > 0 \nearrow$

6) $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{8x}{(x^2+4)^2}\right) = \frac{32-24x^2}{(x^2+4)^3}$

ak $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Longrightarrow f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna

ak $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Longrightarrow f''(x) > 0$ $\cup$ konvexná,

ak $x \in \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right) \Longrightarrow f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna.

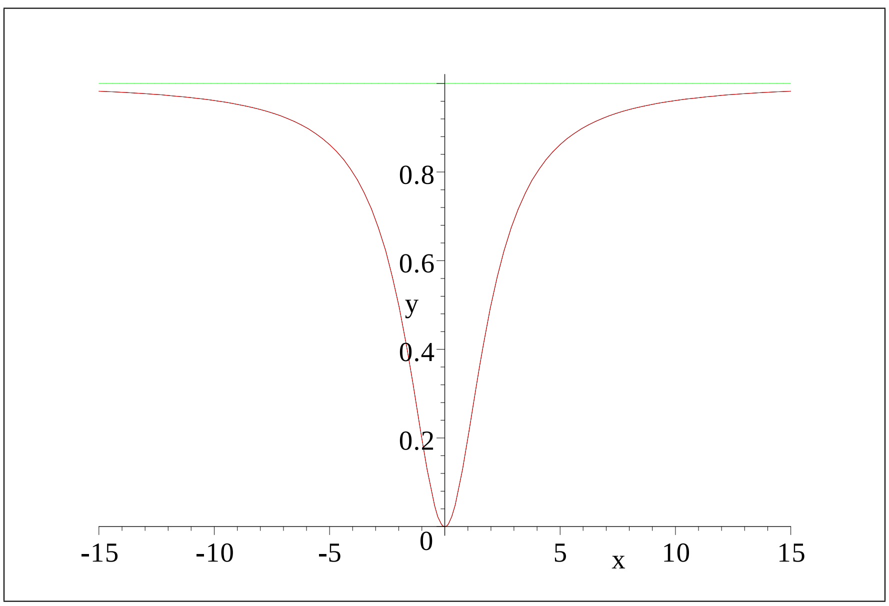
7) Inflexné body:

ak $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}$

ak $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}$

8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4+x^2} = 1$. Priamka $y = 1$ je asymptota v bode $-\infty$ aj v $-\infty$.

$H(f) = \langle 0, 1)$.



Riešenie B

Teória:

1. Elementárne zlomky nad $\mathbf{R}$ sú racionálne funkcie $F(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^k}$ kde $a, \alpha \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$ a $G(x) = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ kde $a, b, p, q \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$, polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene.

2. determinant s riadkom vynásobeným konštantou $\alpha = \alpha$ krát pôvodný determinant

3. Nech $f, g, h : A \longrightarrow \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R}, a$ je hromadný bod množiny A a nech platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in A$. Ak $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} h(x) = L \in \mathbf{R}$, potom $\lim_{x \longrightarrow a} g(x)$ existuje a platí: $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L$.

4. Nech I je interval a $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Nech $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná vo vnútri intervalu I. Potom je funkcia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ konvexná (konkávna) na intervale I práve vtedy, keď pre každý vnútorný bod $x \in I$ je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).

   $y = kx + q : k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$.

Príklady:

1. $\frac{3x^4-x^3-6x^2-5}{(x^2+x+1)(x^2+x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{x-1}{x+x^2+1}$

2. (a) $\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3&= 8 \\ x_1+2x_2+3x_3&= 3 \\ 3x_1+4x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$,

   $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, redukovaná stupňovitá forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 8$

3. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-\left(1+x^2\right)}{(1+x)-1} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} =$
   $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-x)}{x} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} =$
   $= 1 = p - 2 \Longrightarrow p = 3$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos x}}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

1) $D(f) = \mathbf{R}$, $f(0) = 0$, spojitá.

2) Platí $-x \in D(f) \Rightarrow x \in D(f)$. $f(-x) = \frac{-x}{4+(-x)^2} = -\frac{x}{4+x^2} = -f(x)$. Funkcia je nepárna.

3) Pretože má jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4)-5) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4+x^2}\right) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$,

ak $x \in (-\infty, -2)$ $f'(x) < 0 \searrow$

ak $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = -\frac{1}{4} = \min_{x \in \mathbf{R}} f(x)$

ak $x \in (-2, 2)$ $f'(x) > 0 \nearrow$

ak $x = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{1}{4} = \max_{x \in \mathbf{R}} f(x)$

ak $x \in (2, \infty)$ $f'(x) < 0 \searrow$

6) $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\right) = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} = \frac{2x\left(x^2-12\right)}{(x^2+4)^3}$,

ak $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \Longrightarrow f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna

ak $x \in (-2\sqrt{3}, 0) \Longrightarrow f''(x) > 0$ $\cup$ konvexná,

ak $x \in (0, 2\sqrt{3}) \Longrightarrow f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna,

ak $x \in (2\sqrt{3}, \infty) \Longrightarrow f''(x) > 0$ $\cup$ konvexná,

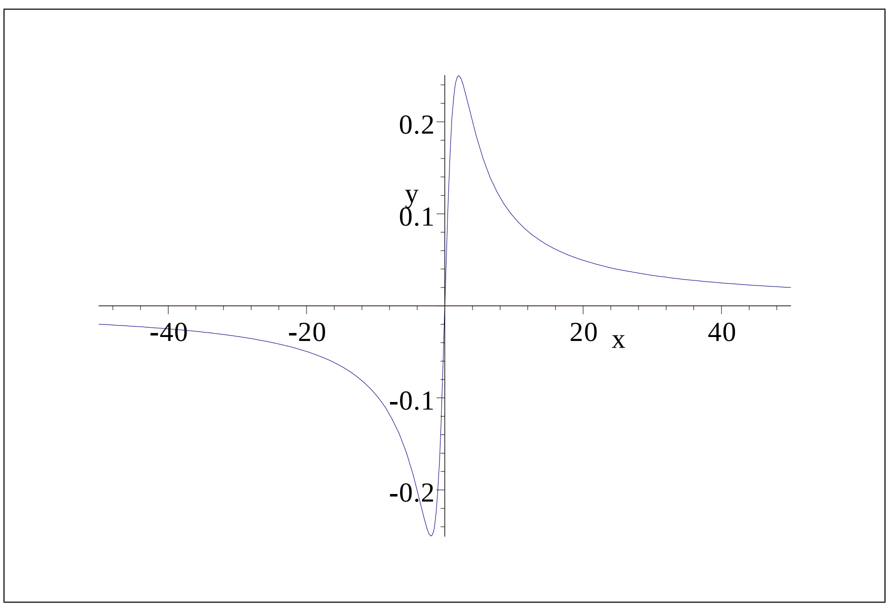
7) Inflexné body:

ak $x = -2\sqrt{3} \Longrightarrow f(-2\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

ak $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

ak $x = 2\sqrt{3} \Longrightarrow f(2\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4+x^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode $-\infty$ aj v $-\infty$. $H(f) = \left\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\rangle$.



Riešenie C

Teória

1. Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná n, inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}\exists$, $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.
2. Napíšte aký je vzťah medzi determinantami: $D_2 = -D_1$
3. Nech $\lim_{x\longrightarrow a} |f|(x) = \infty$ a $\forall x \in A$ je $f(x) \neq 0$, potom $\lim_{x\longrightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$.
4. (Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie) Nech I je interval a $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Nech je f diferencovateľná vnútri intervalu I. Potom f je neklesajúca (nerastúca) na intervale I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ vnútri intervalu I. Naviac f je rastúca (klesajúca) na I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ a $f'(x) \not\equiv 0$ na žiadnom otvorenom podintervale intervalu I.

   $y = kx + q : k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$.

Príklady

1. $\frac{5x^4+5x^3+3x^2+21x+15}{(x^2+x+1)(x^2-x-2)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4x-5}{x+x^2+1}$.
2. Vypočítajte $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\det(\boldsymbol{A})$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   Inverzná matica: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, determinant: 1 (10 bodov)

3. (a) $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{(4-x^2)} = \lim_{x\to-2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{(2-x)(2+x)} \frac{\sqrt{6+x}+2}{\sqrt{6+x}+2} = \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)} = \frac{1}{16}$.

   (b) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^5 \sin x - \cos\left(x^2\right) + \arccos\left(\sqrt{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^5 \sin x\right) - \frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2\right)\right) + \frac{d}{dx}\left(\arccos\left(\sqrt{x}\right)\right) = :$
   $= x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 2x \sin x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

4. $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+4}$

   1) $D(f) = \mathbf{R}$, $f(0) = 0$, spojitá.

2) Platí $-x \in D(f) \Rightarrow x \in D(f)$. $f(-x) = -\frac{(-x)^2}{4+(-x)^2} = -\frac{x^2}{4+x^2} = f(x)$. Funkcia je párna.

3) Pretože má jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4)-5) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{4+x^2}\right) = -\frac{8x}{(x^2+4)^2}$

ak $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \nearrow$

ak $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 = \max_{x \in \boldsymbol{R}} f(x)$

ak $x \in (0, \infty)$ $f'(x) < 0 \searrow$

6) $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{8x}{(x^2+4)^2}\right) = \frac{24x^2-32}{(x^2+4)^3}$

ak $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Longrightarrow f''(x) > 0 \;\cup\;$ konvexná,

ak $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Longrightarrow f''(x) < 0 \cap$ konkávna

ak $x \in \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right) \Longrightarrow f''(x) > 0 \quad \cup$ konvexná.

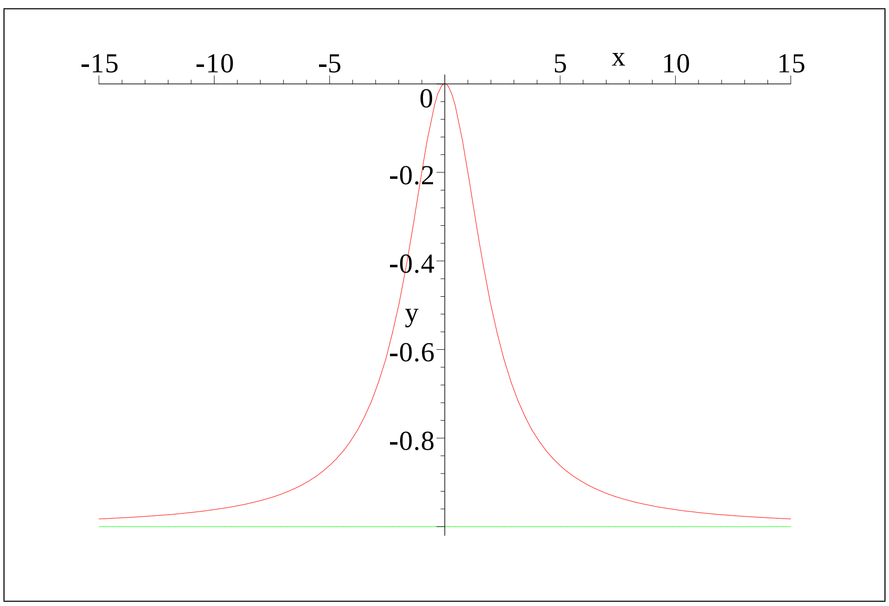
7) Inflexné body:

ak $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{4}$

ak $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{4}$

8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4+x^2} = -1$. Priamka $y = -1$ je asymptota v bode $-\infty$ aj v $-\infty$.

$$H(f) = (-1, 0\rangle\,.$$



Riešenie D

Teória:

1. Elementárne zlomky nad $\mathbf{R}$ sú racionálne funkcie $F(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^k}$kde $a, \alpha \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ a $G(x) = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$kde $a, b, p, q \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene.

2. $D_2 = -\beta D_1$.

3. Ak je $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ diferencovateľná v bode $a \in A$, potom je v tomto bode spojitá.

   rovnica dotyčnice: $y = f(a) + f\,'(a)(x-a)$

   rovnica normály: $y = f(a) - \frac{1}{f\,'(a)}(x-a)$.

4. (Nutná podmienka existencie extrému funkcie) Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$. Ak funkcia f má v bode $c \in (a, b)$ lokálny extrém a je v bode c diferencovateľná, tak $f\,'(c) = 0$.

   Ak pre funkciu $f(x)$ v bode a platí aspoň jedna z rovností: $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, potom priamka $x = a$ sa nazýva vertikálna asymptota.

Príklady:

1. nad $\boldsymbol{R}$

   $\frac{3x^4-x^3-6x^2-5}{(x^2+x+1)(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$.

2. (a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-11\\ x_1+3x_2+4x_3&=-9\\ 2x_1+6x_2+7x_3&=-15 \end{aligned}$$

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -11\\ 1 & 3 & 4 & -9\\ 2 & 6 & 7 & -15 \end{pmatrix}$, redukovaná stupňovitá forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -2 & 7\\ -4 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$

3. (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} & \text{pre} \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ 4 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$.

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \neq 4 = f(0)$,

   funkcia f nie je spojitá v bode $a = 0$.

(b) Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin x}\cos x}{4\cos 4x} = \frac{1}{4}$

4. $f(x) = \frac{3x}{x^2+9}$

1) $D(f) = \mathbf{R}$, $f(1) = 0$, spojitá.

2) Platí $-x \in D(f) \Rightarrow x \in D(f)$. $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2+3^2} = -\frac{3x}{x^2+3^2} = -f(x)$. Funkcia je nepárna.

3) Pretože má jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4)-5) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x^2+3^2}\right) = \frac{3\left(3^2-x^2\right)}{(x^2+3^2)^2}$,
ak $x \in (-\infty, -3)$ $f'(x) < 0 \searrow$
ak $x = -3 \Longrightarrow$ $f(-3) = -\frac{1}{2} = \min_{x\in\mathbf{R}} f(x)$
ak $x \in (-3, 3)$ $f'(x) > 0 \nearrow$
ak $x = 3 \Longrightarrow$ $f(3) = \frac{1}{2} = \max_{x\in\mathbf{R}} f(x)$
ak $x \in (3, \infty)$ $f'(x) < 0 \searrow$

6) $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{33^2-3x^2}{3^4+x^4+23^2x^2}\right) = \frac{6x\left(x^2-27\right)}{(x^2+3^2)^3}$
ak $x \in (-\infty, -3\sqrt{3}) \Longrightarrow$ $f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna
ak $x \in (-3\sqrt{3}, 0) \Longrightarrow$ $f''(x) > 0$ $\cup$ konvexná,
ak $x \in (0, 3\sqrt{3}) \Longrightarrow$ $f''(x) < 0$ $\cap$ konkávna,
ak $x \in (3\sqrt{3}, \infty) \Longrightarrow$ $f''(x) > 0$ $\cup$ konvexná,

7) Inflexné body:
ak $x = -3\sqrt{3} \Longrightarrow$ $f(-3\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
ak $x = 0 \Longrightarrow$ $f(0) = 0$
ak $x = 3\sqrt{3} \Longrightarrow$ $f(3\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3^2+x^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode $-\infty$ aj v $-\infty$. $H(f) = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.