Teória.

1. [5 b.] Dva z troch koreňov mnohočlenu $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, sú $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = 2 - i$. Napíšte tretí koreň a kanonický rozklad polynómu f nad C aj nad R.

   Riešenie: $c_3 = \overline{c_2} = 2 + i$, $\quad f(x) = \underbrace{2\big(x - \frac{1}{2}\big)\big[x - (2 - i)\big]\big[x - (2 + i)\big]}_{\text{nad } C} =$

   $2\big(x - \frac{1}{2}\big)\big[x - 2 + i)\big]\big[x - 2 - i)\big] = \underbrace{2\big(x - \frac{1}{2}\big)(x^2 - 4x + 5)}_{\text{nad } R}$

2. [5 b.] O vektoroch $\vec{u}, \vec{v}$ vieme, že $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -2, 1)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Vypočítajte $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, $\quad (2\vec{v}) \times \vec{u}$, $(2\vec{v}) \times \vec{v}$ $\quad$ a súčin ich dĺžok $\quad \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

   Riešenie: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$,

   $(2\vec{v}) \times \vec{u} = -2\vec{u} \times \vec{v} = (-4, 4, -2)$,

   $(2\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \measuredangle\vec{u}\vec{v} = \frac{\pi}{2} \implies \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 3$,

3. [5 b.] Pre $a \in R$ a funkciu $g\colon R \to R$ platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 1$, $g(a) = 0$. Rozhodnite, či je funkcia g spojitá v bode a (odpoveď odôvodnite) a vypočítajte

   a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{-g(x)}{(x-a)^2}$, $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)^2}{-g(x)}$, $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg}(g(x))$

   Riešenie: $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq g(a) \implies$ *nie je spojitá* v bode a.

   a) $0 < (x-a)^2 \to 0$, $\lim\limits_{x\to a} -g(x) = -1 \implies \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-g(x)}{(x-a)^2} = -\infty$.

   b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)^2}{-g(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

   c) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg}(g(x)) = \lim\limits_{y\to 1} \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

4. [5 b.] Sformulujte nutnú podmienku konvergencie nekonečného radu a dokážte, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ ju spĺňa, ale konvergentný nie je.

   Riešenie:

Nutná podmienka konvergencie. *Ak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, teda nutná podmienka platí, ale rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ nekonverguje:

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\Big) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2}\Big) + \Big(\underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4\times(1/8)=1/2}\Big) + \cdots + \Big(\underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\times(1/2^k)=1/2}\Big) \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k \text{ krát}} = 1 + \frac{k}{2} \implies \lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \text{ t.j. rad nekonverguje.}
\end{aligned}
$$

Príklady.

5. [10] Pomocou determinantov (Cramerovho pravidla) riešte sústavu rovníc (s neznámymi v C):

$$\begin{aligned} x+(1+i)y\ +\ iz &= 1+i \\ x\ +\ iy+(2+i)z &= 0 \\ x\ +\ 2iy\ +\ 2z &= 0 \end{aligned}$$

(riešenie napíšte v algebraickom tvare).

Riešenie:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & i & 2+i \\ 1 & 2i & 2 \end{vmatrix}_{R_2-R_1,R_3-R_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & i \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & i-1 & 2-i \end{vmatrix} = -2+i-2i+2=-i$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 1+i & 1+i & i \\ 0 & i & 2+i \\ 0 & 2i & 2 \end{vmatrix} = (1+i)[2i-2i(2+i)] = 2i(1+i)(-1-i)=4$$

$$d_2=\begin{vmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(1+i)[2-(2+i)] = i(1+i) = i-1$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1+i \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 2i & 0 \end{vmatrix} = (1+i)[2i-i] = i-1$$

$x=\frac{d_1}{d}=\frac{4}{-i}=4i$, $y=\frac{d_2}{d}=(i-1)i=-1-i$, $z=\frac{d_3}{d}=-1-i$ $\underline{\mathcal{R}=\{(4i,-1-i,-1-i)\}}$

6. [10] Dané sú body $A=(3,1,2)$, $B=(4,0,3)$, $C=(2,2,3)$. Nájdite

a. rovnicu roviny ρ, ktorá obsahuje body A,B,C,

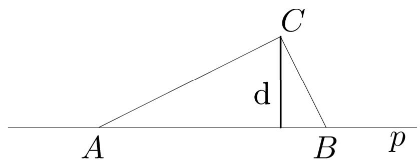
b. parametrické rovnice priamky $p=AB$,

c. vzialenosť bodu C od priamky p.

Riešenie:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,1,1)$, $(x,y,z)-A=(x-3,y-1,z-2)$.

a. $\rho\equiv\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-3)-2(y-1)+0(z-2)=0,\quad \underline{\rho\equiv x+y-4=0}$



b. $p\equiv P=A+t\overrightarrow{AB}=(3,1,2)+t(1,-1,1)$, $t\in R$.

$\underline{p\equiv x=3+t\,,\ y=1-t\,,\ z=2+t\,,\ t\in R}$

c. $\underline{\mathrm{d}(C,p)} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|(-2,-2,0)\|}{\|(1,-1,1)\|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \underline{= \tfrac{2}{3}\sqrt{6}}.$

7a. [5] Určte polomer konvergencie mocninového radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n-5}\right)^{2n}(x-1)^n$

Riešenie: Polomer konvergencie ρ určíme pomocou odmocninového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)^{2n}(x-1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)^2|x-1| = \frac{4}{9}|x-1|<1 \iff |x-1|<\underline{\frac{9}{4}=\rho}$$

7b. [5] Vypočítajte $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x\ln(2x)}$

Riešenie: $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x\ln(2x)} = 1 = \text{“}\dfrac{\infty}{-\infty}\text{''},\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(\frac{1}{x})'}{(\ln(2x))'} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(-\frac{1}{x^2})'}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-1}{x} = -\infty$

8. [10] Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = x + 2\,\mathrm{arccotg}\, x$ (nulové body neurčujte) a nakreslite jej graf.

$D(f) = R$,
f nie je párna ani nepárna ani periodická,
Asymptoty: v so smernicou:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + 2\frac{\mathrm{arccotg}\, x}{x} = 1\,,$$
$$\text{v } +\infty\colon b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} 2\,\mathrm{arccotg}\, x = 0$$
$$\text{v } -\infty\colon b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{arccotg}\, x = 2\pi$$

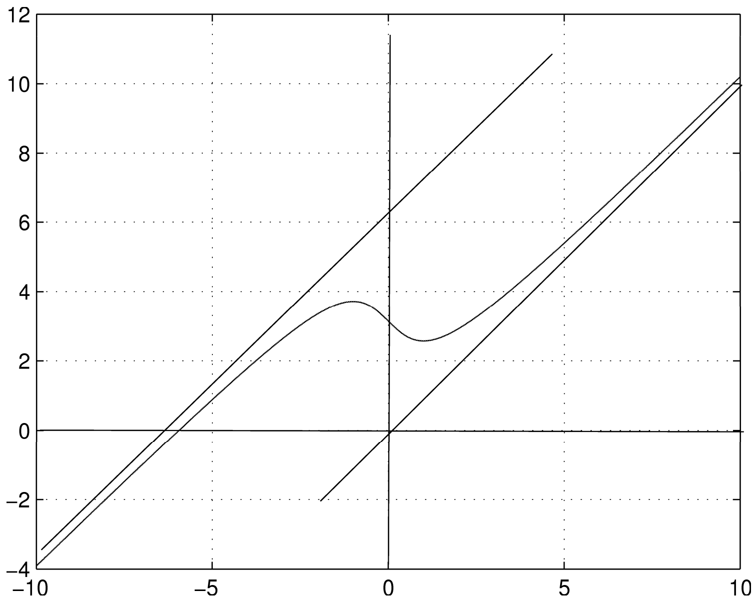
Teda $\underline{y = x}$ je asymptota v $+\infty$, $\underline{y = x + 2\pi}$ je asymptota v $-\infty$.

$$f'(x) = 1 - 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \implies x = \pm 1$$

funkcia je rastúca v $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, \infty)$
klesajúca v $\langle -1, 1\rangle$
$f(-1) = -1 + \frac{3}{2}\pi$ je ostré lokálne maximum, $f(1) = 1 + \frac{1}{2}\pi$ je ostré lokálne minimum.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

konkávna na intervale $(-\infty, 0\rangle$, konvexná na intervale $\langle 0, \infty)$.
Inflexný bod je $x = 0$, $f(0) = \pi$.



$H(f) = (-\infty, \infty)$.