Definícia. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ je postupnosť. Výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sa nazýva nekonečný číselný **rad**. Číslo

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

sa nazýva **n-tý čiastočný súčet** radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečný rad sa nazýva **konvergentný,** ak je konvergentná postupnosť jeho čiastočných súčtov. V takom prípade hovoríme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

je **súčet** daného radu.

Rad, ktorý nie je konvergentný sa nazýva **divergentný**.

Príklad. Zistite, či je konvergentný rad
a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, b. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$, c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Definícia. Nech $a \in R \setminus \{0\}$, $q \in R \setminus \{0,1\}$. Potom sa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ nazýva **geometrický rad** s kvocientom q.

Poznámka. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ je geometrický $\iff \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ pre $\forall\, n$.

Veta. *Geometrický rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ *je konvergentný* $\iff |q| < 1$. *V takom prípade* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}$.

Dôkaz. $s_n - qs_n = (1-q)s_n = (a+aq+aq^2+\cdots+aq^n) - (aq+aq^2+aq^3\cdots+aq^n+aq^{n+1}) \implies s_n = \dfrac{a-aq^{n+1}}{1-q}$.
Ak $|q| < 1$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ a teda $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$.

Ak $|q| \geq 1$, tak aj $|aq^n| \geq |a| > 0$ a teda $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, preto rad nie je konvergentný.

Príklad. Vypočítajte 1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-3n+2}$.

Veta. *(***Cauchy-Bolzanovo** *kritérium) Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný vtedy a len vtedy ak*

$$\textit{ku } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in N \textit{ také, že:} \qquad n, m \in N,\ m > n \geq n(\varepsilon) \implies \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon\,.$$

Veta. *Ak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergentný, tak je aj* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný.*

Definícia. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva **absolútne konvergentný**, ak je konvergentný aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Poznámka. Môže sa stať, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, ale rad absolútnych hodnôt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je divergentný.
Potom sa hovorí, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **relatívne** konvergentný.

Veta. *(nutná podmienka konvergencie radu)*
Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný, tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Označme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$

$$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0\,.$$

Príklad. Ukážte, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ je konvergentný rad (nie je absolútne konvergenrný).

Veta. *(Leibnitzovo kritérium) Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$ je nerastúca postupnosť. Potom*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \textit{je konvergentný rad.}$$

Dôkaz. Označme $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$. Ukážeme, že postupnosť $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca zhora ohraničená. Potom musí byť konvergentná a ľahko sa ukáže, že v takom prípade $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$: $s_{2n+1}=-a_1+\underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0}+\cdots+\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{\geq 0}$, teda $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť. Je aj zhora ohraničená: $s_{2n+1}=\underbrace{(-a_1+a_2)}_{\leq 0}+\underbrace{(-a_3+a_4)}_{\leq 0}+\cdots+\underbrace{(-a_{2n-1}+a_{2n})}_{\leq 0}-a_{2n+1}\leq 0$.

Rady s nezápornými členmi

Veta (majorantné porovnávacie kritérium). *Nech $\forall n\in N$ platí $0\leq b_n\leq a_n$. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \ \textit{konverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty}b_n \ \textit{tiež konverguje.}$$

($\sum a_n$ sa nazýva majornatný rad k radu $\sum b_n$)

Príklad. Ukážte, že $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ je konvergentný rad. (Návod: využite, že $\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{1}{n^2-n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.)

Predchádzajúci príklad je špeciálny prípad tvrdenia:

Veta. *Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ je pre*
a) *$p>1$ konvergentný;* b) *pre $p\leq 1$ divergentný.*

Veta (D'Alambertovo podielové kritérium). *Nech $a_n\neq 0$ pre $\forall n\in N$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q$. Potom*

1. *Ak $q<1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ absolútne konvergentný.*
2. *Ak $q>1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergentný.*

Veta (Cauchyho odmocninové kritérium). *Nech $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=q$. Potom*

1. *Ak $q<1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ absolútne konvergentný.*
2. *Ak $q>1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergentný.*

Tvrdenie o divergencii vyplýva v oboch tvrdeniach z toho, že $q>1 \implies \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, tvrdenie o konvergencii v oboch prípadoch dostaneme z poorovnávacieho kritéria (dá sa ukázať, že majorantným radom je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ pre vhodneé a).

Príklad. Nájdite súčet radu
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_2\dfrac{2n+1}{2n-1}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{5}\right)^n$, d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{5}\right)^n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n}-1}{5^n}$.

Príklad. Zistite, či je konvergentný (absolútne alebo relatívne) alebo divergentný rad
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{5n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{2^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-2}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)^2}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{2^n}$,
f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{2^n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{3n-1}$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$, j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$, $a\in R$.