5 bodov ♣

1. Vypočítajte limitu: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x+2-\sqrt{4+x}}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+2-\sqrt{4+x}} \cdot \frac{x+2+\sqrt{4+x}}{x+2+\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(x+2+\sqrt{4+x}\right)}{(x+2)^2-(4+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(x+2+\sqrt{4+x}\right)}{x^2+4x+4-4-x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(x+2+\sqrt{4+x}\right)}{x^2+3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x+2+\sqrt{4+x}\right)}{x+3} = \frac{2\left(0+2+\sqrt{4+0}\right)}{0+3} = \frac{8}{3}$$

Komentár

Bodovanie:

- Vo vzorovom riešení je 6 rovností.
- Za druhý a tretí člen pred znamienkom rovnosti bolo po **0,5 bode**.
- Za prvý, štvrtý, piaty a šiesty člen pred znamienkom rovnosti bolo po **1 bode**.

Študenti často nesprávne rozšírili výraz, ktorý je správne rozšírený vo vzorovom riešení pred prvým znamienkom rovnosti. Aj keď ho rozšírili správne, časté chyby v ďalších výpočtoch ich zaviedli do slepých uličiek, ktoré neviedli k správnemu riešeniu.

5 bodov

2. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ v bode $A = [1, ?]$.

Riešenie: Prvá súradnica dotykového bodu je $x_t = 1$ a druhú si vypočítame $y_t = f(1) = 0$. Čiže hľadáme dotyčnicu v bode $A = [1, 0]$.

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'.\, x - \ln x.(x)'}{x^2} = \ldots = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Vypočítame si veľkosť derivácie v dotykovom bode, čo bude veľkosť smernice dotyčnice:

$$k_t = f'(1) = 1\,.$$

Smernicový tvar rovnice priamky je $p:\ y = k.x + q$ a hodnoty x_t, y_t a k_t pre dotyčnicu poznáme. Môžeme si preto vypočítať aj hodnotu q:

$$0 = 1.1 + q \quad \Rightarrow \quad q = -1$$

Hľadaná rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode $A = [1, 0]$ je potom $t:\ y = x - 1$.

Komentár

Bodovanie:

- Za druhú súradnicu dotykového bodu bol **1 bod**.
- Za správnu deriváciu funkcie $f(x)$ bol **1 bod**.
- Za správnu hodnotu derivácie v bode $x_t = 1$ (smernicu dotyčnice) bol **1 bod**.
- Za správne dopočítanie hodnoty q bol **1 bod**.
- Za správnu rovnicu dotyčnice bol **1 bod**.
- Alternatívne ku predošlým dvom bodom: tí, ktorí priamo napísali rovnicu dotyčnice, bez explicitného počítania hodnoty q, dostali **2 body**.

Najčastejšou chybou bola zle zderivovaná funkcia $f(x)$, a teda nesprávna hodnota smernice dotyčnice. Často aj s týmito chybami študenti ďalej počítali správne, čo bolo pri opravovaní zohľadňované.

4 body

3. Nájdite deriváciu funkcie: $f(x) = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Riešenie: Daná funkcia je zložená, a preto ju derivujeme podľa pravidla o derivácii zloženej funkcie $(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$:

$$f'(x) = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \left(x+2+\sqrt{x^2+3x+1}\right)' =$$

$$= e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}\right) = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \frac{2\sqrt{x^2+3x+1}+2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$$

Komentár

Bodovanie:

- Za správne uvedenie, alebo správne praktické použitie, pravidla o derivovaní zloženej funkcie boli **2 body**.
- Za správne zderivovanie danej funkcie boli **2 body**.

Priemerný počet bod za tento príklad bol zaokrúhlene 2.19. Problém ani tak nespočíval v samotnom derivovaní, ktoré väčšina študentov ako-tak zvládla, ale najmä v tom, že aspoň polovica študentov má vážne nedostatky v matematických vedomostiach spadajúcich ešte do základnej školy! Vyše polovici študentov totiž vôbec nič nehovorí priorita aritmetických operácii $+, -, *, \div$ a význam zátvoriek v matematických výrazoch! Títo študenti nevidia žiaden rozdiel medzi výrazmi:

$$a = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}\right) \quad , \quad b = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot 1 + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$$

$$c = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}}\right) \cdot (2x+3)$$

$$d = e^{x+2+\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot 2x+3$$

a mnohými ďalšími veľmi „kreatívnymi“ variáciami na uvedenú tému, ktoré mi pri opravovaní vháňali slzy do očí. Mnohí študenti kládli medzi uvedené výrazy znamienko $=$ s nonšalantnosťou vlastnou ľuďom nepoškvrneným akýmkoľvek základným vzdelaním. Takéto riešenia sa v žiadnom prípade nedali považovať za správne, a to ani v prípade, že sa medzi uvedenými výrazmi vyskytol aj „ten správny“.

Okrem toho sa v riešeniach vyskytlo aj množstvo iných „drobnejších“ chýb typu: „ $\sqrt{x^2+3x+1} = x + \sqrt{3x}+1 = \dots$ “ a pod.

6 bodov

4. Nájdite definičný obor $D(f)$, nulové body (čiže všetky body $x \in D(f)$, pre ktoré platí $f(x) = 0$), intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie: $f(x) = e^{-x}\left(-x^2 + x - 1\right)$.

Riešenie:

- Vo funkčnom predpise nie sú žiadne zlomky, ani funkcie, ktoré by vyžadovali nejaké obmedzujúce podmienky. Definičný obor danej funkcie je teda $D(f) = \mathbb{R}$.

- Nulové body funkcie sa vypočítajú z rovnice $f(x) = 0$:

$$e^{-x}\left(-x^2 + x - 1\right) = 0 \iff -x^2 + x - 1 = 0$$

  Uvedená kvadratická rovnica má diskriminant záporný a nemá reálne riešenia. Daná funkcia preto **nemá nulové body**.

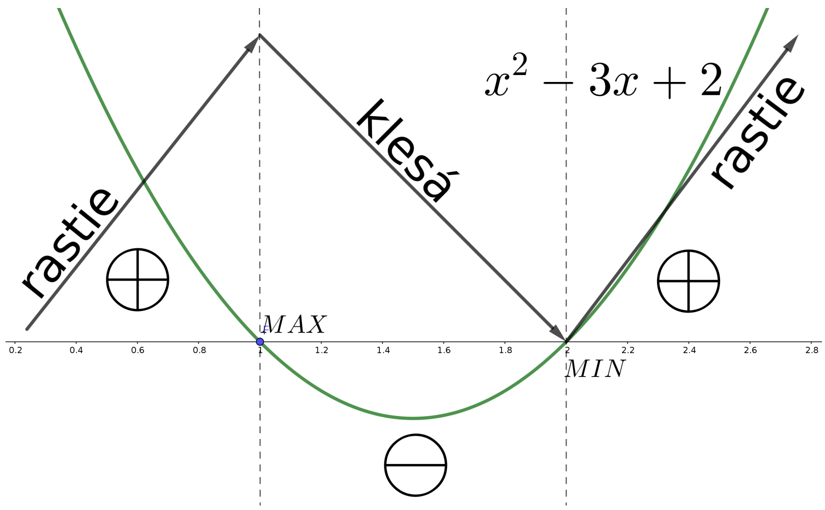
- Na nájdenie intervalov monotónnosti potrebujeme prvú deriváciu danej funkcie:

$$f'(x) = e^{-x}\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

  Z nej potom vypočítame stacionárne body ako riešenia rovnice $f'(x) = 0$:

$$e^{-x}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

  Koreňmi uvedenej kvadratickej rovnice sú čísla $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Tieto rozdeľujú definičný obor na tri intervaly a potrebujeme zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na týchto intervaloch. Vieme, že platí $e^{-x} > 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$, a preto znamienko prvej derivácie závisí len od funkcie $x^2 - 3x + 2$, ktorej grafom je konvexná parabola znázornená na nasledovnom obrázku:



  Z obrázku vidíme, že prvá derivácia funkcie je na intervaloch $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ kladná a na intervale $(1, 2)$ záporná. Takže daná funkcia $f(x)$

  - na intervaloch $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ **rastie**
  - a na intrevale $(1, 2)$ **klesá**.

- Z intervalov monotónnosti, ako aj z uvedeného obrázku, je zrejmé, že v bodoch $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$ bude mať daná funkcia $f(x)$ lokálne extrémy.
  - V bode $x_1 = 1$ má **lokálne maximum** $f(1) = -\dfrac{1}{e}$.
  - V bode $x_2 = 2$ má **lokálne maximum** $f(2) = -\dfrac{3}{e^2}$.

Komentár

Bodovanie:

- Za správne určený definičný obor bol **1 bod**.
- Za hľadanie nulových bodov a zdôvodnenie ich neexistencie bol **1 bod**.
- Za správne zderivovanie funkcie bol **1 bod**.
- Za správny výpočet a nájdenie stacionárnych bodov bol **1 bod**.
- Za správnu identifikáciu a uvedenie intervalov monotónnosti bol **1 bod**.
- Za správnu identifikáciu a uvedenie lokálnych extrémov bol **1 bod**.

Priemerný počet bodov za tento príklad bol zaokrúhlene len 2,74 bodu. Pritom už len nájdenie definičného oboru bolo tak triviálne, že sa dalo považovať za bonusový bod „zadarmo“. Našlo sa ale 29 študentov, ktorí ani len toto nespravili. Časté boli chyby z nepozornosti, keď si študenti zle prepísali funkciu zo zadania (Vie mi niekto vysvetliť načo ju prepisovali?), prípadne zle opísali nejaké svoje medzivýsledky. Rovnako, ako v predošlej úlohe, bol aj veľký problém zderivovať danú funkciu. Problémy sa vyskytovali aj s riešením rovníc $f(x) = 0$ a $f'(x) = 0$ a našli sa aj takí študenti, ktorí uvedené rovnice síce vyriešili, ale mali problém s vyvodením záverov z vypočítaných, správnych, riešení týchto rovníc.
Viacerí študenti mali zle zderivovanú funkciu $f(x)$, avšak ďalší postup riešenia bol principiálne správny, aj keď výsledky a závery nie. Toto bolo samozrejme pri bodovaní pozitívne zohľadnené.