Dôkazy

1. Nech f je polynóm, $c \in C$. Potom je zvyšok po delení $f(x):(x-c)$ hodnota polynómu $f(c)$.
Dôkaz. Delením $f(x):(x-c)$ dostaneme polynómy $g(x)$ (podiel) a $r(x)$ (zvyšok) také, že platí:

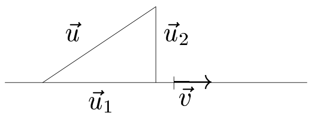
$$f(x) = (x-c)g(x) + r(x)\,, \qquad \text{a } \operatorname{st} r(x) < \operatorname{st}(x-c) = 1$$

Preto je $\operatorname{st} r(x) \le 0$, teda $r(x) = r$ je konštantná funkcia. Dosadením $x = c$ dostaneme

$$f(c) = (c-c)g(c) + r = r\,,$$

čo sme mali dokázať.

2. Kolmý priemet vektora $\vec{u}$ do smeru nenulového vektora $\vec{v}$ je: $\mathrm{P}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\,.$
Dôkaz:



$\vec{u}$ sa dá napísasoftt v tvare

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\,,$$

kde $\vec{u}_1$ je rovnobežné s $\vec{v}$, $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$, preto $\exists t \in R$ také, že $\vec{u}_1 = t\vec{v}$ a $\vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0$. Predchádzajúcu rovnosť vynásobíme skalárne vektorom $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= t\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{u}_2\cdot\vec{v} \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= t\vec{v}\cdot\vec{v} \\
t &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}} \implies \mathrm{P}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{u}_1 = t\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\,.
\end{aligned}$$

3. Konvergentná postupnosť je ohraničená.
Dôkaz. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$. Potom ku každému $\varepsilon > 0$, teda aj k $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ také, že $n \in O_\delta(\infty) \implies a_n \in O_\varepsilon(a)$. Vezmime $n_0 > \dfrac{1}{\delta}$, potom každé $n > n_0$ patrí do $O_\delta(\infty)$ teda, pre

$$n > n_0 \implies a_n \in (a-1, a+1) \implies \text{ množina } \{a_n\colon n > n_0\} \text{ je ohraničená.}$$

Pretože množina $\{a_n\colon n \le n_0\}$ je konečná, je aj ohraničená. Postupnosť $\{a_n\}$ je ohraničená, lebo množina jej hodnôt je zjednotením dvoch ohraničených množín:

$$\{a_n\colon n \in N\} = \{a_n\colon n \in N, 1 \le n \le n_0\} \cup \{a_n\colon n \in N, n > n_0\}\,.$$

4. Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu: Ak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný, tak $\lim a_n = 0$.
Dôkaz. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ak je rad konvergentný, tak $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$

$$\begin{aligned}
s_n - s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n \\
&\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0
\end{aligned}$$

5. Tvrdenie: Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ je divergentný.
Dôkaz: Pre číslo $n = 2^k$, $k \in N$ je čiastočný súčet daného radu

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&\ge 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\frac{1}{2}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2}}_{k \text{ krát}} = 1 + \frac{k}{2} \to \infty\,,
\end{aligned}$$

ale ak by bol rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ konvergentný, tak by $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2^k} \in R$.