Obsah

Kapitola 1

Úvod

Prvé dve kapitoly tohto textu sú výberom z niektorých častí kurzu lineárnej algebry, ktorého autorom je RNDr. Peter Kaprálik, CSc. Výber sme urobili s jeho dovolením.

1.1 Základy

V matematike sa zaoberáme štúdiom kvantitatívnych vlastností matematických pojmov. Nutnými nástrojmi matematických úvah sú základné znalosti logiky.

1.1.1 Základné pojmy z logiky

Tvrdenia v bežnom živote, ale hlavne v matematike, formulujeme pomocou oznamovacích viet. Tieto vety môžeme skúmať z hľadiska ich pravdivosti alebo nepravdivosti. Pravdivosť alebo nepravdivosť vety nazývame jej pravdivostnou hodnotou. Vety, ktoré majú pravdivostnú hodnotu, ktorá sa nemení sa nazývajú *výroky*. Pravdivostná hodnota pravdivého výroku je 1, pravdivostná hodnota nepravdivého výroku je 0.

Príklad 1 *Zistite, ktoré z uvedených viet sú výroky:*

1. *Bratislava je mesto.*
2. *Dva krát dva je päť.*
3. *Trenčín je dedina.*
4. *Niekde prší.*
5. *Anička je pekná.*

Riešenie 1 *1. je pravdivý výrok, 2. a 3. sú nepravdivé výroky, 4. a 5. nie sú výroky.* □

Výroky označíme malými písmenami abecedy: $p, q, \ldots$. Ak p je výrok *negáciou* výroku p nazývame výrok "nie je pravda, že p" a označujeme ho

p' alebo $\bar{p}$. Výroky je možné spájať tak, aby vznikla veta, ktorá je opäť výrokom. V matematike používame rôzne spôsoby spájania výrokov. Nech p, q sú dva výroky, sformulujme základné typy kombinácií výrokov:

- *konjunkcia* výrokov p a q sa nazýva výrok "p a q" a označuje sa $p \wedge q$.
- *dizjunkcia* výrokov p a q sa nazýva výrok "p alebo q" a označuje sa $p \vee q$.
- *implikácia* výrokov p a q sa nazýva výrok "Ak p, potom q" a označuje sa $p \Rightarrow q$.
- *ekvivalencia* výrokov p a q sa nazýva výrok "p vtedy a len vtedy, keď q" a označuje sa $p \Leftrightarrow q$.

Pre horeuvedené typy kombinácií výrokov platí nasledujúca pravdivostná tabuľka:

p	q	p'	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Z definície implikácie vyplýva, že ak sú pravdivé výroky p aj $p \Rightarrow q$, musí byť pravdivý aj výrok q. Teda na to, aby bol pravdivý výrok q v prípade, že výrok $p \Rightarrow q$ je pravdivý stačí aby bol pravdivý výrok p. Preto hovoríme, že pravdivosť výroku p je *postačujúcou podmienkou* pre pravdivosť výroku q.

Ak je pravdivý výrok $p \Rightarrow q$, čo možno povedať o pravdivosti výroku p? Je zrejmé, že výrok p môže byť pravdivý len vtedy, ak je pravdivý výrok q. Ak byvýrok p bol pravdivý a výrok q nepravdivý, ako vidieť z tabuľky, výrok $p \Rightarrow q$ by bol nepravdivý. Hovoríme, že pravdivosť výroku q je *nutnou podmienkou* pre pravdivosť výroku p.

Veta, ktorá obsahuje znaky $x, y, z, ...$, a z ktorej po dosadení nejakých prvkov za tieto znaky dostaneme výrok sa nazýva *výroková funkcia.*

Príklad 2 *Nech x je reálne číslo. Potom $\varphi(x) = (x > 5)$ je výroková funkcia jednej premennej.*

Ak je daná výroková funkcia $\varphi(x)$ môžeme utvoriť výroky:

- " *pre každé x platí $\varphi(x)$*", tento výrok označujeme krátko symbolom $(\forall x; \varphi(x))$,
- " *existuje x tak, že platí $\varphi(x)$*", tento výrok označujeme krátko symbolom $(\exists x; \varphi(x))$,
- " *existuje jediné x, pre ktoré platí $\varphi(x)$*", tento výrok označujeme krátko symbolom $(\exists! x; \varphi(x))$.

1.1.2 Množiny.

Množinu považujeme za určenú, ak vieme o ľubovoľnom objekte rozhodnúť, či je alebo nie je jej prvkom. O každej veci a, ktorá patrí do množiny M, hovoríme, že je *prvkom* množiny M, čo zapisujeme $a \in M$. Skutočnosť, že prvok b *nie je prvkom* množiny M, zapíšeme takto: $b \notin M$. Množinu môžeme definovať dvomi spôsobmi:

- tak, že vypíšeme všetky jej prvky, napríklad zápis $M = \{1, 2, 11, 20\}$ znamená, že čísla $1, 2, 11, 20$ sú prvkami množiny M,
- alebo definujeme všetky jej prvky, napríklad zápis

  $$P = \{x \in A; \varphi(x)\} = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$$

  znamená, že prvkami množiny P sú tie prvky z množiny A, pre ktoré je $\varphi(x)$ pravdivý výrok.

Množinu B nazývame *podmnožinou* množiny A, ak každý prvok množiny B je tiež prvkom množiny A čo zapisujeme takto $B \subset A$.

Dve množiny *sa rovnajú,* ak majú tie isté prvky, t.j. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Množina, ktorá nemá žiadne prvky sa nazýva *prázdna množina* a označuje sa symbolom $\emptyset$.

Ak $a \in A,\ b \in B$ *usporiadanou dvojicou* (a, b) prvkov $a \in A,\ b \in B$ nazývame dvojicu, v ktorej záleží na poradí prvkov $a,\ b$, pričom prvok a je prvý a b druhý člen dvojice.

Ak $A,\ B$ sú dve množiny, potom

- množinu označenú $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$ nazývame *zjednotením* množín $A,\ B$,
- množinu označenú $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ nazývame *prienikom* množín $A,\ B$,
- množinu označenú $A \setminus B = A - B = \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ nazývame *rozdielom* množín $A,\ B$,
- množinu označenú $A \times B = \{(a, b); a \in A,\ b \in B\}$ nazývame *kartézskym súčinom* množín $A,\ B$ (v uvedenom poradí).

1.1.3 Číselné množiny.

Čísla sú základom matematiky. Prehľadne uvedieme číselné množiny, ktoré poznáme zo základných a stredných škôl:

$\mathbb{N}$ - množina *prirodzených* čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

$\mathbb{N}^+$ - množina *kladných prirodzených* čísel $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$,

$\mathbb{Z}$ - množina *celých* čísel $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$\mathbb{Q}$ - množina *racionálnych* čísel $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+\right\}$,

$\mathbb{I}$ - množina *iracionálnych* čísel. Iracionálne čísla sú také reálne čísla, ktoré nemôžeme vyjadriť v tvare racionálneho čísla. Iracionálne čísla sú napríklad čísla π, $\sqrt{2}$. Zjednotenie množiny racionálnych čísel a množiny iracionálnych čísel tvorí množinu reálnych čísel.

$\mathbb{R}$ - množina reálnych čísel,

$\mathbb{C}$ - množina komplexných čísel.

Platí:

$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

V množine *prirodzených* čísel platí dôkazový *princíp matematickej indukcie,* pomocou ktorého sa dokazujú výroky typu: " pre každé prirodzené číslo n platí výrok $V(n)$". Princíp dôkazu spočíva v dvoch krokoch, ktoré zodpovedajú vlastnostiam prirodzených čísel:

1. Ukážeme platnosť výroku $V(n_0)$ pre $n_0 \in \mathbb{N}$, tj ukážeme platnosť $V(n_0)$.

2. Ukážeme, že pre každé prirodzené číslo $k \geq 1$, platí implikácia $V(k) \Rightarrow V(k+1)$. Potom pre každé prirodzené číslo n platí výrok $V(n)$. Predpoklad $V(k)$ implikácie v druhom kroku sa nazýva *indukčný predpoklad.*

Reálne čísla je možné reprezentovať ako body na horizontálnej priamke, tak že ak $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ bod reprezentujúci číslo a leží vľavo od bodu reprezentujúceho číslo b. Túto priamku nazývame *reálna os.* Ku množine $\mathbb{R}$ niekedy pridávame dva symboly $-\infty$ a ∞, ktoré nie sú reálne čísla, pričom budeme písať: ak $a \in \mathbb{R}$, potom $-\infty < a < \infty$ a $-\infty < \infty$. Definujeme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a hovoríme, že $\mathbb{R}^*$ je rozšírená množina reálnych čísel.

1.2 Komplexné čísla

Riešenie niektorých problémov v množine reálných čísel môže vyžadovať jej rozšírenie. Napríklad v množine reálnych čísel $\mathbb{R}$ neexistuje číslo, ktoré je riešením rovnice

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Aby sme odstránili tento nedostatok rozšírime množinu $\mathbb{R}$ o nový prvok, ktorý označíme i a nazývame *imaginárna jednotka.* Prvok i musí spĺňať rovnosť

$$i^2 = -1.$$

Po zavedení tohto čísla má rovnica (1.1) dva korene i a $-i$.

Komplexné čísla $\mathbb{C}$ sú čísla tvaru

$$z = x + yi,$$

kde $x,\, y \in \mathbb{R}$. Horeuvedený tvar komplexných čísel sa nazýva *algebraický tvar* komplexného čísla z. Reálne číslo x nazývame *reálna časť* komplexného čísla z a označujeme $x = \mathrm{Re}z$, reálne číslo y nazývame *imaginárna časť* komplexného čísla z a označujeme, $y = \mathrm{Im}z$. Ak pre komplexné číslo $z = x + yi$ platí: $y = 0$ číslo z považujeme za reálne číslo. Ak pre komplexné číslo $z = x + yi$, platí $x = 0$ číslo z nazývame *rýdzo imaginárne číslo.*

Geometrická interpretácia komplexného čísla $z = x + yi$ je bod $(x,\, y)$ v rovine $\mathbb{R}^2$ alebo vektor

$$\bar{r} = \overrightarrow{(x,\, y)}.$$

Reálne čísla ležia na osi o_x, ktorú nazývame *reálna os* a rýdzo imaginárne čísla ležia na osi o_y, ktorú nazývame *imaginárna os.*

Dve komplexné čísla $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ *sa rovnajú,* ak majú rovnaké reálne časti aj imaginárne časti, teda $z_1 = z_2$ práve vtedy, keď $a = c,\ b = d$. Množinu všetkých bodov $(x,\, y)$ v rovine $\mathbb{R}^2$, ktoré odpovedajú komplexným číslam $x + yi$ nazývame *komplexná rovina.* Existuje jednoznačné priradenie medzi množinou $\mathbb{C}$ a množinou všetkých bodov v komplexnej rovine. Odteraz nebudeme tieto množiny rozlišovať.

1.2.1 Algebraické operácie na $\mathbb{C}$.

Na množine $\mathbb{C}$ zavedieme operácie " + ", " · " nasledujúcim spôsobom: ak $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, potom

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

To znamená, že násobenie komplexných čísel v algebraickom tvare je definované ako násobenie polynómov s použitím rovností

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots.$$

Príklad 3 *Nech* $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -3+i$. *Vypočítajte* $z_1 + z_2, z_1 - 2z_2,\, z_1 \cdot z_2$.

Dve komplexné čísla $x + iy$ a $x - iy$ s rovnakými reálnymi časťami a opačnými imaginárnymi časťami sa nazývajú *komplexne čísla združené* . Komplexne číslo združené k číslu z budeme označovať $\overline{z}$ a v komplexnej rovine sú to čísla symetrické podľa reálnej osi. Ak $z = x + iy$, potom $\overline{z} = x - iy$. Platí:

$$\mathrm{Re}\overline{z} = \mathrm{Re}z,\, \mathrm{Im}\overline{z} = -\mathrm{Im}z,$$

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2},\, \mathrm{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

$$\overline{(\overline{z})} = z,\ \ z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

ľahko sa dá overiť, že platí:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Vzdialenosť bodu (a, b) od bodu $(0, 0)$ v komplexnej rovine nazývame *absolútna hodnota* komplexného čísla $z = a + bi$, označujeme $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je zrejmé, že $|z| \geq 0$, a $|z| = (z \cdot \overline{z})^{\frac{1}{2}} = |\overline{z}|$.

Delenie dvoch komplexných čísel $z_1 = a + bi$ a $z_2 = c + di \neq 0$ je definované predpisom

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\frac{z_1}{z_2}$, *kde* z_1, z_2 *sú z predošlého príkladu.*

Pre absolútne hodnoty platí:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

1.2.2 Cvičenia

1. Nájdite reálne čísla $r,\ s$ tak, aby platilo

   (a) $(2-4i)r + (3-5i)s = 2i$ .... $[r = -3,\ s = 2]$.

   (b) $(-3-2i)r + (-1+2i)si = -6-5i$ .... $[r = 4,\ s = -3]$.

2. Kedy je súčet komplexných čísel $a + bi,\ c + di$ číslo

   (a) reálne, ... $[b = -d]$.

   (b) imaginárne, ... $[b \neq -d]$.

   (c) rýdzoimaginárne? .... $[a = -c,\ b \neq -d]$.

3. Vypočítajte

   (a) $(2+3i)(3-4i) - (5-4i)$ .... $[13 + 5i]$.

   (b) $(-2+3i)^3$ .... $[46 + 9i]$.

   (c) $i^n,\ n \in \mathbb{N}$ .... $\left[\begin{array}{l} i \text{ pre } n = 1+4k, \\ -1 \text{ pre } n = 2+4k \\ -i \text{ pre } n = 3+4k \\ 1 \text{ pre } n = 4k \end{array}\right]$.

(d) $\dfrac{2}{-1+3i}$ .... $\left[-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right]$.

(e) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$ .... $\left[-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i\right]$.

4. Pre ktoré komplexné čísla $z = a + bi$ platí

(a) $z = \overline{z}$ .... $[\, b = 0]$.

(b) $z^2 = \overline{z}$ .... $\left[0, 1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

5. Vypočítajte absolútnu hodnotu komplexných čísel

(a) $3-4i$ .... $[5]$.

(b) $\dfrac{(1+i)^{12}}{(1-i)^{10}}$ .... $[2]$.

1.3 Polynómy

1.3.1 Polynómy - základné pojmy

Definícia 1 *Nech* $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *Funkciu*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.2}$$

nazývame komplexný polynóm komplexnej premennej x (stručne ho budeme nazývať len polynóm). čísla a_0, a_1, …, a_n sú koeficienty polynómu *f a výrazy $a_k x^k$ pre $k \in \{0, 1.\ldots, n\}$ sú* členy polynómu *f, špeciálne a_0 je* absolútny člen. *Polynóm $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(x) = 0$ nazývame* nulový polynóm.

Definičný obor aj koobor polynómov bude vždy buď množina $\mathbb{R}$, alebo množina $\mathbb{C}$, pričom z kontextu bude vždy jasné, o ktorom prípade uvažujeme. Preto namiesto dlhého zápisu (1.2) budeme používať kratší:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alebo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alebo

$$f(x)$$

alebo len

$$f$$

Množinu všetkých komplexných polynómov premennej x budeme označovať $P(\mathbb{C})$ a množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientami $P(\mathbb{R})$. Prvky množiny $P(\mathbb{R})$ budeme tiež nazývať *reálne polynómy.*

Je zrejmé, že $P(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{C})$.

Súčet $f+g$, *rozdiel* $f-g$ a *súčin* fg polynómov f, g definujeme štandardne, tak ako sú tieto binárne operácie definované pre funkcie, teda

$$f+g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$f-g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$fg:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ (fg)(x)=f(x)g(x)$$

Príklad 5 *Určte* $f+g,\ f-g,\ fg$, *ak* $f(x)=x-1,\ g(x)=x^2+x+1.$

Súčet, rozdiel a súčin dvoch polynómov je opäť polynóm.

Rovnosť polynómov definujeme ako rovnosť funkcií. Keďže polynómy majú rovnaké definičné obory, môžeme povedať, že dva polynómy f,g sú rovnaké a píšeme $f=g$, ak $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\mathbb{C}$.

Veta 1 *Nech* $f(x)=a_sx^s+a_{s-1}x^{s-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_s\neq 0$ *a* $M=\max\{|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_{s-1}|\}$. *Potom pre každé komplexné číslo* z, *ktoré vyhovuje podmienke* $|z|>1+\dfrac{M}{|a_s|}$, *je* $f(z)\neq 0$.

Veta 2 *Polynóm* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ *je nulový vtedy a len vtedy, keď* $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$.

Veta 3 *Dva polynómy*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\ b_m\neq 0$$

sú rovnaké práve vtedy, keď $n=m,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots,a_n=b_n$.

Poznámka 1 *Vo vyšších ročníkoch sa zoznámite s matematickými štruktúrami ako sú konečné okruhy a konečné polia. Ak definujeme polynómy s koeficientami z týchto štruktúr, tak predchádzajúca veta neplatí. Existujú rozdielne polynómy, ktoré v každom bode definičného oboru majú rovnaké hodnoty. To znamená, že reprezentujú rovnaké funkcie.*

Definícia 2 Stupňom polynómu $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, *ktorého aspoň jeden koeficient je nenulový, nazývame číslo*

$$st(f)=\max\{k\in\{0,1,\ldots,n\};\ a_k\neq 0\}$$

Príklad 6 *Nech* $h(x)=0x^5+2x^4+5x-1,$ *potom* $st(h)=4$. $\square$

Polynóm stupňa s môžeme písať v tvare

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_s \neq 0$$

(koeficienty a_k pre $k > s$ sú nulové, preto členy s týmito koeficientami netreba písať). Tento tvar nazývame *normálny tvar polynómu f*. Koeficient a_s nazývame *najvyšší koeficient*, člen $a_s x^s$ *najvyšší člen polynómu f*. Polynómy nultého stupňa a nulový polynóm nazývame *konštantné polynómy*, polynómy prvého stupňa - *lineárne polynómy*, polynómy druhého stupňa - *kvadratické polynómy* a polynómy tretieho stupňa - *kubické polynómy*.

Uvedomme si, že nemáme definovaný stupeň nulového polynómu. Tento nedostatok môžeme odstrániť takto:

Definícia 3 *Stupňom nulového polynómu nazývame symbol $-\infty$.*

Stupne nenulových polynómov sú prirodzené čísla, ktoré vieme sčitovať a porovnávať. Aby to bolo možné aj so stupňom nulového polynómu, dohodnime sa, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty \\ &-\infty + (-\infty) = -\infty \\ &-\infty < n \end{aligned}$$

Tieto pravidlá využívame hlavne pri násobení polynómov.

Veta 4 *Pre každé dva polynómy $f, g \in P(\mathbb{C})$*

$$\begin{aligned} &st(f+g) \leq \max\{st(f), st(g)\} \\ &st(fg) = st(f) + st(g) \end{aligned}$$

1.3.2 Delenie polynómov

Príklad 7 *Zistite, či k polynómom $f(x) = 1$, $g(x) = x+1$ existuje polynóm h tak, aby $f = gh$.*

Riešenie 2 *Pre polynóm h má platiť: $1 = (x+1)h(x)$, odkiaľ pre stupne vyplýva*

$$st(gh) = st(x+1) + st(h) = 1 + st(h) = \begin{cases} 1 + (-\infty) = -\infty, & ak\ st(h) = -\infty \\ 1 + n, & ak\ st(h) = n > -\infty \end{cases}$$

V oboch prípadoch $st(gh) \neq st(f) = 0$. Znamená to, že požadovaný polynóm h neexistuje. □

V predchádzajúcom príklade sme videli, že podiel polynómov f, g je funkcia, ktorá nie je polynóm. Podobná situácia je pri delení celých čísel. Tu tiež podiel celých čísel nemusí byť celé číslo. Avšak existuje tu delenie celých čísel so zvyškom. Nasledujúca veta hovorí, že delenie so zvyškom je možné zaviesť aj pre polynómy.

Veta 5 *Ku každým dvom polynómom $f, g \in P(\mathbb{C})$, kde g je nenulový polynóm, existujú také polynómy $q, r \in P(\mathbb{C})$, že*

1) $f = gq + r$,
2) $st(r) < st(g)$.

Podmienkami 1 a 2 sú polynómy q, r jednoznačne určené.

Polynóm q z predchádzajúcej vety sa nazýva *podiel* a polynóm r *zvyšok* po delení polynómu f polynómom g.

Príklad 8 *Vydeľte so zvyškom polynóm $f(x) = 5x^5 - x^4 + 2x^3 + x - 2$ polynómom $g(x) = x^2 + x + 1$.*

Pri výpočte koeficientov podielu q a zvyšku r sa používajú len operácie sčitovania, násobenia a delenia, preto ak f, g sú reálne polynómy, tak aj q, r sú reálne polynómy. Dokonca, ak f, g sú racionálne polynómy (ich koeficienty sú racionálne čísla), tak aj q, r sú racionálne polynómy.

Veta 6 *Zvyšok po delení polynómu f polynómom $x - c$, kde $c \in \mathbb{C}$, je konštantný polynóm $r(x) = f(c)$.*

Všimnime si teraz bližšie delenie polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynómom $g(x) = x - c$, kde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$. Podielom je polynóm $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a zvyškom $r(x) = u$. Poďme zistiť, aké sú ich koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, u$. Predovšetkým platí rovnosť polynómov

$$\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\
&= (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + u = \\
&= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - cb_1)x + u - cb_0.
\end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme

$$\begin{array}{lcl}
a_n & = & b_{n-1} \\
a_{n-1} & = & b_{n-2} - cb_{n-1} \\
 & \vdots & \\
a_1 & = & b_0 - cb_1 \\
a_0 & = & u - cb_0
\end{array}
\qquad \text{odkiaľ} \qquad
\begin{array}{lcl}
b_{n-1} & = & a_n \\
b_{n-2} & = & a_{n-1} + cb_{n-1} \\
 & \vdots & \\
b_0 & = & a_1 + cb_1 \\
u & = & a_0 + cb_0
\end{array}$$

Výsledné vzťahy je vhodné písať v tvare tabuľky

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
\hline
c & & cb_{n-1} & \dots & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1}+cb_{n-1}}_{b_{n-2}} & \dots & \underbrace{a_1+cb_1}_{b_0} & \boxed{\underbrace{a_0+cb_0}_{u=f(c)}}
\end{array}
$$

ktorú nazývame *Hornerova schéma.*

Príklad 9 *Hornerovou schémou vydeľte polynóm* $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 8x + 2$ *polynómom* $x - 2$ *a vypočítajte* $f(2)$.

Riešenie 3

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & 0 & 1 & -8 & 2 \\
\hline
2 & & 2 & 0 & 0 & 2 & -12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & \boxed{-10}
\end{array}
$$

Podiel je polynóm $x^4 + x - 6$ *a zvyšok* -10. *Takže platí*

$$f(x) = (x-2)(x^4 + x - 6) - 10$$

$$f(2) = -10. \ \square$$

Definícia 4 *Hovoríme, že polynóm* f *je* deliteľný *nenulovým polynómom* g *a píšeme* $g \mid f$, *ak existuje taký polynóm* h, *že* $f = gh$. *Polynóm* g *sa nazýva* deliteľ polynómu f.

Všimnime si, že polynóm f je deliteľný polynómom g práve vtedy, keď zvyšok po delení polynómu f polynómom g je nulový polynóm. Namiesto " polynóm f je deliteľný polynómom g“ sa tiež hovorí " polynóm g delí polynóm f “.

Príklad 10 *Zistite, pre aké čísla* a, b *je polynóm* $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + a$ *deliteľný polynómom* $g(x) = x^2 + 1$.

1.3.3 Korene polynómu

Definícia 5 *Komplexné číslo* c *nazývame* koreňom polynómu f, *ak* $f(c) = 0$.

Príklad 11 *Zistite, či 3 je koreňom polynómu* $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.

Veta 7 *Komplexné číslo* c *je koreňom polynómu* f *práve vtedy, keď* $(x - c) \mid f$.

Definícia 6 *Ak číslo c je koreň polynómu f stupňa $n \in \mathbb{N}^+$, tak lineárny polynóm $x - c$ nazývame* koreňový činiteľ *polynómu f.*

Definícia 7 *Komplexné číslo c sa nazýva k-*násobný koreň *($k \in \mathbb{N}^+$) polynómu f, $st(f) \geq 1$, ak $(x-c)^k \mid f$ a $(x-c)^{k+1} \nmid f$. Pre $k = 1$ hovoríme, že c je* jednoduchý koreň.

Ak c je k-násobný koreň polynómu f, tak $f(x) = (x-c)^k g(x)$ pre vhodný polynóm g, ale neexistuje polynóm h taký, že $f(x) = (x-c)^{k+1} h(x)$.

Príklad 12 *Zistite, koľkonásobným koreňom polynómu $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ je číslo 2.*

Veta 8 *(O racionálnych koreňoch polynómov s celočíselnými koeficientami.) Nech racionálne číslo $\dfrac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$ sú nesúdeliteľné čísla, je koreň polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, s celočíselnými koeficientami. Potom $q \mid a_n$, $\quad p \mid a_0$.*

Príklad 13 *Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}$*

Riešenie 4 *Polynóm f nemá celočíselné koeficienty, ale polynóm $g(x) = 6f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$ áno. Navyše pre každé komplexné číslo x platí $f(x) = 0$ práve vtedy, keď $g(x) = 0$, To znamená, že g má rovnaké korene ako f. Môžeme teda hľadať racionálne korene polynómu g v tvare $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo, q je prirodzené číslo vyhovujúce podmienkam: p delí $a_0 = 1$, q delí $a_5 = 2$. Do úvahy pripadajú čísla:*

$$p \in \{\pm 1\},\ q \in \{1, 2\},\ \textit{odkiaľ vyplýva}\ \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$$

Ak polynóm g má racionálny koreň, tak podľa predchádzajúcej vety to môže byť len niektoré z čísel ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ a žiadne iné. Ktoré z nich je koreňom polynómu g, môžeme zistiť Hornerovou schémou.

Veta 9 *Nech $f \in P(\mathbb{R})$, $st(f) \geq 1$, potom platí: Ak $c \in \mathbb{C}$ je koreň polynómu f, tak aj komplexne združené číslo $\overline{c}$ je koreň polynómu f. Naviac, ak c je k-násobný koreň polynómu f, tak aj $\overline{c}$ je k-násobný koreň polynómu f.*

Reálny polynóm stupňa aspoň 1 nemusí mať žiadny reálny koreň. Takáto situácia nemôže nastať pre komplexný polynóm stupňa aspoň 1.

Veta 10 *(Základná veta algebry) Každý komplexný polynóm stupňa aspoň jedna má aspoň jeden komplexný koreň.*

Príklad 14 *Nájdite všetky korene polynómu* $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$, *ak viete, že jedným koreňom je* $-1 + i$.

Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Podľa základnej vety algebry má tento polynóm aspoň jeden koreň. Označme ho c_1. Polynóm f je deliteľný koreňovým činiteľom $x - c_1$, teda existuje polynóm

$$f_1 \ \mathrm{st}\,(f_1) = n - 1 \quad \text{tak, že } f(x) = (x - c_1) f_1(x).$$

Ak $n - 1 \geq 1$, tak f_1 má koreň, môžeme ho označiť c_2 a existuje taký polynóm

f_2, $\mathrm{st}(f_2) = n-2$, že $f_1(x) = (x - c_2) f_2(x)$ a potom $f(x) = (x - c_1)(x - c_2) f_2(x)$.

Takto môžeme pokračovať ďalej a po n-tom zopakovaní tohto kroku dostaneme

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) f_0(x), \quad \mathrm{st}(f_0) = 0$$

f_0 je konštantný polynóm b. Vzhľadom k tomu, že najvyšší koeficient polynómu f je a_n, musí platiť: $b = a_n$.Tak dostávame tvar

$$f(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n),$$

ktorý nazývame *rozklad polynómu f na súčin koreňových činiteľov.* Z tohto tvaru polynómu f vyplýva, že čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú jeho korene a okrem nich žiadne iné nemá. Preto platí

Veta 11 *Polynóm stupňa n, $n \geq 1$, má najviac n rôznych koreňov.*

Polynóm nultého stupňa nemá žiadny koreň. Koreňom polynómu stupňa $-\infty$ (nulového polynómu) je každé komplexné číslo.

Veta 12 *Nech f, g sú komplexné polynómy stupňa najviac $n \in \mathbb{N}$ a g je nenulový polynóm. Nech pre $n + 1$ komplexných čísel $x_0, x_1, \dots, x_n$ platí*

$$f(x_0) = g(x_0), f(x_1) = g(x_1), \dots, f(x_n) = g(x_n),$$

potom $f = g$.

1.3.4 Kanonický rozklad polynómu nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.

V rozklade polynómu f na súčin koreňových činiteľov nemusia byť korene $c_1, \dots, c_n$ navzájom rôzne. Povedzme, že navzájom rôzne sú len $c_1, \dots, c_k$, $(k \leq n)$, pričom c_1 sa opakuje r_1-krát, $\dots, c_k$ sa opakuje r_k-krát. Potom môžeme písať

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_k)^{r_k}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

Tomuto tvaru hovoríme *kanonický roklad polynómu f nad C.*

Zaoberajme sa teraz reálnym polynómom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ a možnosťou rozložiť ho na súčin reálnych polynómov, čo možno najmenšieho stupňa. Povedzme, že polynóm f má navzájom rôzne reálne korene $c_1, \ldots, c_k$ násobností v poradí $r_1, \ldots, r_k$, a pretože $f \in P(\mathbb{R})$, navzájom rôzne po dvoch komplexne združené korene $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \ldots, \alpha_m, \overline{\alpha_m}$ s násobnosťami $s_1, \ldots, s_m$. Potom

$$f(x) = a_n(x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_k)^{r_k}(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\overline{\alpha_1})^{s_1} \ldots (x-\alpha_m)^{s_m}(x-\overline{\alpha_m})^{s_m}$$

je kanonický rozklad polynómu f nad $\mathbb{C}$. Ľahko sa presvedčíme, že pre každé komplexné číslo α platí

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 = x^2 + px + q \in P(\mathbb{R})$$

Použitím tohto vzťahu môžeme kanonický rozklad nad $\mathbb{C}$ polynómu f upraviť na tvar

$$f(x) = a_n(x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_k)^{r_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$$

kde $c_1, \ldots, c_k$ sú navzájom rôzne reálne korene násobností $r_1, \ldots, r_k$, polynómy $x^2 + p_j x + q_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ majú imaginárne korene $\alpha_j, \overline{\alpha_j}$, ktoré sú s_j-násobnými koreňmi polynómu f. Je zrejmé, že $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_m) = n$. Takýto tvar reálneho polynómu nazývame *kanonický rozklad* polynómu f nad $\mathbb{R}$.

Príklad 15 *Nad $\mathbb{R}$ nájdite kanonický rozklad polynómov*

1. $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$,
2. $g(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$.

Kanonické rozklady niektorých polynómov môžeme získať ich postupným rozkladom na súčin použitím vhodných úprav a vzorcov.

Príklad 16 *Nájdite kanonické rozklady nad $\mathbb{R}$ aj nad $\mathbb{C}$ polynómov $f(x) = 4x^4 + 6x^2 + 9$ a $g(x) = 8x^6 - 27$.*

(Poznámka o algebraických rovniciach) *Algebraickou rovnicou stupňa n*, $n \geq 1$, nazývame rovnicu $f(x) = 0$, kde f je polynóm stupňa n. *Riešením* (*koreňom*) tejto rovnice je každé komplexné číslo c, pre ktoré platí $f(c) = 0$, t.j. c je koreň polynómu f. Riešiť algebraickú rovnicu $f(x) = 0$ znamená nájsť všetky jej korene, t.j. všetky korene polynómu f. Poznamenajme, že pre výpočet koreňov algebraických rovníc vyšších stupňov ako 4 neexistujú vo všeobecnosti analogické vzorce ako pre kvadratické rovnice. Pre algebraické rovnice stupňov 3 a 4 síce takéto vzorce existujú, ale pre svoju komplikovanosť sú prakticky nepoužiteľné. Na riešenie algebraických rovníc ľubovoľného stupňa sú vypracované numerické metódy, pomocou ktorých možno vypočítať korene s ľubovoľne zvolenou presnosťou.

1.3.5 Cvičenia

1. Vynásobte polynómy:

   (a) $(2x^4 - 6x^3 + 5x - 1)(x^2 - 2x + 2)$
   $\left[2x^6 - 10x^5 + 16x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 12x - 2\right]$.

   (b) $(3x^3 + (1-i)x^2 + ix - 2 + i)(3x^3 + (1+i)x^2 - ix - 2 - i)$
   $\left[9x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 5x^2 + 2x + 5\right]$.

2. Vykonajte delenie so zvyškom:

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$
   $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^2 + 3x + 11 \\ \text{zvyšok: } 25x - 5\end{array}\right]$.

   (b) $2ix^6 + (2-2i)x^5 - ix^4 + x^3 - x^2) : (ix^3 + (1-i)x^2 + 1)$
   $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^3 - x - 1 \\ \text{zvyšok: } -ix^2 + x + 1\end{array}\right]$.

   (c) $(x^3 - x^2 - x) : (x - 1 + 2i)$ .... $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } x^2 - 2ix - 5 - 2i \\ \text{zvyšok: } -9 + 8i\end{array}\right]$.

3. Pomocou Hornerovej schémy vykonajte delenie so zvyškom:

   (a) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)$
   $\left[(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5)\right]$.

   (b) $(4x^3 + x^2) : (x + 1 + i)$
   $\left[(4x^2 - (3+4i)x - 1 + 7i) + 8 - 6i\right]$.

   (c) $(3x^4 + (1-3i)x^3 - 2ix^2 + ix - i) : (x - i)$
   $\left[(x-i)(3x^3 + x^2 - ix + 1 + i) - 1\right]$.

4. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte $f(c)$:

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ c = 4$ .... $[136]$.

   (b) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2,\ c = -\dfrac{1}{3}$ .... $[1]$.

   (c) $x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7,\ c = -2 - i$ ... $[-1 - 44i]$.

5. Aké podmienky musia spĺňať komplexné čísla p, q, m, aby polynóm $x^4 + px^2 + q$ bol deliteľný polynómom $x^2 + mx + 1$?
   $\left[m = 0,\ q - p + 1 = 0 \text{ alebo } q = 1,\ p = 2 - m^2\right]$.

6. Určte číslo a tak, aby číslo c bolo koreňom polynómu f:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2,\ c = 3$ .... $\left[\dfrac{47}{3}\right]$.

(b) $f(x) = 2x^5 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a,\ c = -1$ .... $\left[\dfrac{1}{3}\right]$.

7. Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

(a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8,\ c = 2$
[dvojnásobný] .

(b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$
[trojnásobný] .

(c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$
[štvornásobný] .

(d) $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1,\ c = i$
[trojnásobný] .

8. Nájdite racionálne korene polynómov:

(a) $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3,$ .... $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$.

(b) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4,$ .... $\left[-\dfrac{2}{3},\ 2\right]$.

(c) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ .... [nemá racionálne korene] .

(d) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ .... $\left[\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}\right]$.

(e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ ...... [-1 – štvornásobný] .

9. Riešte rovnicu, ak poznáte jeden jej koreň:

(a) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0,\ 1 - i$ .... $\left[1 \pm i,\ -1 \pm \sqrt{3}\right]$.

(b) $4x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 71x^2 + 16x - 20 = 0,\ 2 + i$
$\left[2 \pm i,\ \pm 2i,\ \pm\dfrac{1}{2}\right]$.

(c) $x^6 - x^5 - 13x^3 + 9x^2 + 8x + 20 = 0,\ -1 + 2i$
$\left[-1 \pm 2i,\ 2\ \text{– dvojnásobný},\ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$.

(d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\left[1,\ \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})\ \text{– dvojnásobný}\right]$.

10. Nech a, b, c sú navzájom rôzne komplexné čísla. Dokážte, že polynómy f, g sú rovnaké.

    (a) $f(x) = \dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$, $g(x) = x^2$
    [Stačí dokázať, že $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(c) = g(c)$].

    (b) $f(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$, $g(x) = 1$
    [Stačí dokázať, že $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(c) = g(c)$].

11. Nájdite kanonický roklad polynómov nad $\mathbb{R}$:

    (a) $x^4 + 4$ .... $\left[(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\right]$.

    (b) $x^6 - 8$
    $\left[(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+2)(x^2-\sqrt{2}x+2)\right]$.

    (c) $3x^4 - 18x^2 + 9$
    $$\left[\begin{array}{l} 3\left(x-\sqrt{3-\sqrt{6}}\right)\left(x+\sqrt{3-\sqrt{6}}\right)\times \\ \times\left(x-\sqrt{3+\sqrt{6}}\right)\left(x+\sqrt{3+\sqrt{6}}\right) \end{array}\right].$$

    (d) $4x^4 + x^2 + 1$
    $$\left[4\left(x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right].$$

    (e) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1$
    $$\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2-x+1)\right].$$

    (f) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^2 - 8x + 4$
    $\left[(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\right]$.

1.4 Racionálne funkcie

Definícia 8 *Nech $f(x)$, $g(x) \in P(\mathbb{R})$ sú polynómy s reálnymi koeficientami. Potom funkciu*

$$F : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ g(x) = 0\} \to \mathbb{R},\ F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

sa nazýva reálna racionálna funkcia. Ak st(f) < st(g), funkcia F sa nazýva rýdzoracionálna.

Príklad 17 *Funkcie*

$$F(x) = \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2}, \qquad G(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{3x^5 - x^3 + x^2 + 2}$$

sú racionálne. Funkcia G je rýdzoracionálna. □

Definícia 9 *Elementárnym zlomkom nad $\mathbb{R}$ (presnejšie:* reálnym elementárnym zlomkom*) nazývame každú racionálnu funkciu*

$$F(x) = \frac{a}{(x - \alpha)^k}$$

kde $a, \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ a

$$G(x) = \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ a polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene.

Veta 13 *Každá reálna racionálna funkcia sa dá vyjadriť v tvare súčtu reálneho polynómu a konečného počtu elementárnych zlomkov nad $\mathbb{R}$.*

Tomuto tvaru racionálnej funkcie hovoríme *rozklad racionálnej funkcie na elementárne zlomky nad $\mathbb{R}$.*

Postup pri rozklade racionálnej funkcie $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ na elementárne zlomky nad $\mathbb{R}$:

1. Vykonáme delenie polynómov $f,\ g$ so zvyškom:

   $$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$$

   odkiaľ

   $$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

   Tým sme získali vyjadrenie racionálnej funkcie H v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

2. Nájdeme kanonický rozklad polynómu g nad $\mathbb{R}$.

3. Rýdzoracionálnu funkciu $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ rozpíšeme na súčet elementárnych zlomkov tak, že ku každému činiteľu z kanonického rozkladu polynómu g (okrem najvyššieho koeficienta) pridávame zlomky:

   $$(x - \alpha)^k \quad \longrightarrow \quad \frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{a_k}{(x - \alpha)^k}$$

$$\left(x^2+px+q\right)^k \quad\longrightarrow\quad \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q}+\frac{b_2x+c_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+\frac{b_kx+c_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

4. Vypočítame koeficienty $a_j,\ b_j,\ c_j$.

Príklad 18 *Rozložte na elementárne zlomky nad* $\mathbb{R}$ *racionálnu funkciu*

$$G(x)=\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)}.$$

1.4.1 Cvičenia

1. Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbb{R}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

   (a) $\dfrac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$

   $$\left[\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{x-2}+\frac{cx+d}{(x^2+2x+4)^3}+\frac{ex+p}{(x^2+2x+4)^2}+ +\frac{qx+r}{x^2+2x+4}+\frac{sx+t}{x^2-2x+4}\right].$$

   (b) $\dfrac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$ $\quad\left[\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{(x+2)^2}+\dfrac{d}{x+2}+\dfrac{e}{x-2}\right].$

   (c) $\dfrac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$

   $$\left[\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-2}+\frac{dx+e}{x^2+4}+\frac{rx+s}{x^2-2x+4}\right].$$

2. Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbb{R}$ racionálnu funkciu:

   (a) $\dfrac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$ .... $\left[\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}\right].$

   (b) $\dfrac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$

   $$\left[x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{x-6}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{2}{x^2-2x+2}\right].$$

   (c) $\dfrac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$

   $$\left[x-1+\frac{6}{(2x-1)^2}-\frac{10}{2x-1}+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}\right].$$

   (d) $\dfrac{x^6+x^5}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$

   $$\left[x+\frac{x-1}{3(x^2+x+1)^2}+\frac{-11x+5}{9(x^2+x+1)}+\frac{2}{9(x-1)}\right].$$

(e) $\dfrac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$ $\left[\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2+x+1}\right].$

Kapitola 2

Lineárna algebra

2.1 Matice

2.1.1 Matice - základné vlastnosti

Definícia 10 *Reálnou maticou typu* $m \times n,\ m, n \in \mathbb{N}^+$, *nazývame tabuľku (schému) reálnych čísel*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Číslo $a_{jk} \in \mathbb{R}$ *sa nazýva* prvok matice $\mathbf{A}$ na (j, k)-tom mieste. *Prvky* $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$, *kde* $p = \min\{m, n\}$, *tvoria* hlavnú diagonálu *a prvky* $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{p\,n-p+1}$ vedľajšiu diagonálu *matice* $\mathbf{A}$.

Pre množinu všetkých matic typu $m \times n$ s reálnymi prvkami budeme používať označenie $\mathbb{R}^{m\times n}$. Nebudeme rozlišovať medzi prvkami $(a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ a $a \in \mathbb{R}$. preto aj budeme písať $\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$. Matice typu $n \times 1$ nazývame *stĺpcové n-tice* alebo *stĺpcové vektory.* Matice typu $1 \times n$ sú budeme nazývať n-tice. Maticu $\mathbf{A}$, ktorej prvky sú a_{jk} pre $j \in \{1. \dots, m\},\ k \in \{1, \dots, n\}$, budeme stručnejšie zapisovať $(a_{jk})_n^m$ alebo, keď bude jasné, aký je počet riadkov a stĺpcov matice alebo tieto hodnoty nebudú dôležité, len (a_{jk}).

Matica, ktorej všetky prvky sú nuly, sa nazýva *nulová* a označujeme ju $\mathbf{0}$ alebo $(0)_n^m$, ak chceme vyznačiť aj jej typ. Nasledujúca n-tica

$$(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$$

sa nazýva *j-tý riadok* a stĺpcová m-tica

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

k-tý stĺpec matice $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$.

Ak označíme $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_m$ riadky a $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ stĺpce matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, tak budeme tiež písať

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n).$$

Príklad 19 *Pre maticu*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

je tretí stĺpec $\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *a druhý riadok* $\mathbf{R}_2 = (3, 2, 1, 0)$.$\square$

Definícia 11 *Dve matice* $\mathbf{A} = (a_{jk})$, $\mathbf{B} = (b_{jk})$ *sa rovnajú* $(\mathbf{A} = \mathbf{B})$ *, ak sú rovnakého typu a pre všetky* j, k *platí* $a_{jk} = b_{jk}$.

Definícia 12 *Vedúcim prvkom n-tice nazývame jej prvú nenulovú zložku zľava.*

Príklad 20 *Vedúcim prvkom šestice*

$$(0, 0, -2, 0, 3, 1)$$

je jej tretia zložka -2. $\square$

Nulová n-tica nemá vedúci prvok.

Definícia 13 *Matica*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}$$

sa nazýva stupňovitá, *ak pre* $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ *platí:*

1. Vedúci prvok riadku $\mathbf{R}_{j+1}$ *je posunutý aspoň o jedno miesto doprava vzhľadom k vedúcemu prvku riadku* $\mathbf{R}_j$.

2. Ak $j < m$ *a* $\mathbf{R}_j = \bar{0}$, *tak* $\mathbf{R}_{j+1} = \bar{0}$, *pričom* $\bar{0}$ *označuje nulovú n-ticu.*

Príklad 21 *Matica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je stupňovitá, matica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

nie je stupňovitá. □

Definícia 14 *Matica* **A** *sa nazýva* redukovaná stupňovitá*, ak je stupňovitá, vedúci prvok každého nenulového riadku je 1 a v každom stĺpci, v ktorom sa nachádza vedúci prvok niektorého riadku, sa všetky ostatné prvky rovnajú* 0.

Príklad 22 *Matica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je redukovaná stupňovitá. □

Definícia 15 Elementárnou riadkovou operáciou *(ERO) na matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}$$

nazývame každú z nasledujúcich úprav matice **A***:*

1. Vzájomná výmena dvoch riadkov matice **A**.

2. Nahradenie jedného riadku matice **A** jeho nenulovým násobkom.

3. Nahradenie jedného riadku súčtom tohto riadku a ľubovoľného násobku iného riadku matice **A**.

Jednotlivé ERO budeme označovať takto:

$\mathbf{R}_j :=: \mathbf{R}_k$ – vzájomná výmena j-teho a k-teho riadku

$\mathbf{R}_j := \alpha\mathbf{R}_j$ – nahradenie j-teho riadku jeho α-násobkom

$\mathbf{R}_j := \mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$ – nahradenie j-teho riadku súčtom tohto riadku a β-násobku k-teho riadku

Analogicky sa definujú *elementárne stĺpcové operácie* (ESO) na matici $\mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n)$. Stačí v definícii ERO nahradiť riadky stĺpcami, pričom *súčet stĺpcových vektorov* a *násobok stĺpcového vektora číslom* sú definované takto:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_m \end{pmatrix}$$

ERO a ESO nazývame spoločným názvom *elementárne operácie* (EO).

Definícia 16 *Hovoríme, že matica* $\mathbf{B}$ *vznikla z matice* $\mathbf{A}$ *konečným počtom ERO (resp. ESO či EO), ak existujú také matice* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_p$*, že* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1, \mathbf{B} = \mathbf{A}_p$ *a pre každé* $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ *matica* $\mathbf{A}_{j+1}$ *vznikla z matice* $\mathbf{A}_j$ *jedinou ERO (resp. ESO či EO).*

Veta 14 *Ak matica* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *konečným počtom ERO (resp. ESO či EO), tak aj* $\mathbf{A}$ *vznikne z matice* $\mathbf{B}$ *konečným počtom ERO (resp. ESO či EO).*

Definícia 17 *Dve matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *sa nazývajú*

$$\left.\begin{array}{l} \text{riadkovo ekvivalentné} \\ \text{stĺpcovo ekvivalentné} \\ \text{ekvivalentné} \end{array}\right\} \textit{ak } \mathbf{B} \textit{ vznikne z } \mathbf{A} \textit{ konečným počtom } \left\{\begin{array}{l} \textit{ERO} \\ \textit{ESO} \\ \textit{EO} \end{array}\right. .$$

Tieto ekvivalencie v tom istom poradí označujeme: $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B},\ \mathbf{A} \overset{s}{\sim} \mathbf{B},\ \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Príklad 23 *Ukážte, že matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sú riadkovo ekvivalentné.

Veta 15 *Každá matica je riadkovo ekvivaletná s niektorou stupňovitou a tiež s niektorou redukovanou stupňovitou maticou.*

Dôkaz pre ľubovoľnú maticu nebudeme robiť. Ukážeme si však postup pri úprave konkrétnej matice $\mathbf{A}$ na stupňovitú resp. redukovanú stupňovitú maticu.

Príklad 24 *Nájdime stupňovitú a redukovanú stupňovitú maticu riadkovo ekvivaletnú s maticou*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 5 *Najprv v matici* **A** *vyhľadáme riadok, ktorého vedúci prvok sa nachádza najviac vľavo, a vymeníme tento riadok s prvým. Potom pripočítame vhodné násobky prvého riadku k ostatným riadkom tak, aby v stĺpci pod vedúcim prvkom prvého riadku boli len nuly.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=:\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_5}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_1}}{\overset{r}{\sim}}$$

$$\underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_1}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Maticu **B** *upravujeme tak ako maticu* **A**, *s tým rozdielom. že úlohu prvého riadku tu preberá riadok druhý, ďalej potom riadok tretí atď až nakoniec dostaneme stupňovitú maticu.*

$$\mathbf{B} \underset{\substack{\mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-4\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_2}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_3}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Matica **D** *je stupňovitá a riadkovo ekvivalentná s maticou* **A**. *Redukovanú stupňovitú maticu dostaneme z matice* **D** *takto: Vhodné násobky posledného nenulového riadku pripočítame k riadkom nad ním tak, aby sa vynulovali prvky nad vedúcim prvkom posledného nenulového riadku. Takto pokračujeme s predposledným nenulovým riadkom atď, až všetky prvky nad vedúcimi prvkami budú nuly. Nakoniec každý nenulový riadok vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho vedúceho prvku.*

$$\mathbf{D} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=2\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=2\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_1:=\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=-\frac{1}{2}\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}}$$

$$\underset{\substack{\mathbf{R}_1:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3:=-\frac{1}{2}\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

$\mathbf{E}$ *je redukovaná stupňovitá matica riadkovo ekvivaletná s maticou* $\mathbf{A}$. □

2.1.2 Cvičenia

1. Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2),$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0, & 1, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 2\\ 0, & 0, & -2\\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0\\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1 \end{pmatrix}$$

sú

(a) stupňovité, ... [$\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$].

(b) redukované stupňovité? ..... [$\mathbf{K}$ pre $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$].

2. Nájdite redukovanú stupňovitú maticu, ktorá je riadkovo ekvivaletná s maticou

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & -3 \end{pmatrix}\right]$.

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}\right].$$

2.2 Sústavy lineárnych rovníc

2.2.1 Základné pojmy

Definícia 18 *Nech* $m, n \in \mathbb{N}^+$, $a_{jk}, b_j \in \mathbb{R}$ *pre* $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. *Potom*

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2.1}$$

je sústava m lineárnych rovníc *s* n neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$, *s* koeficientami a_{jk} *a s* pravou stranou

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame maticou sústavy *(2.1) a maticu*

$$(\mathbf{A}\,|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

rozšírenou maticou sústavy *(2.1).*
Ak pravá strana $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, *tak (2.1) sa nazýva* homogénna sústava lineárnych rovníc, *pričom* $\mathbf{0}$ *je nulová matica typu* $m \times 1$.

Zvislá čiara v rozšírenej matici sústavy (2.1) slúži len na vizuálne oddelenie pravej strany od koeficientov sústavy. Sústava lineárnych rovníc (2.1) je svojou rozšírenou maticou sústavy jednoznačne určená.

Definícia 19 Riešením sústavy lineárnych rovníc *(2.1) nazývame každú n-ticu* $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$*, pre ktorú platí*

$$\begin{array}{c} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n = b_1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n = b_m \end{array}$$

V riešeniach príkladov budeme množinu všetkých riešení sústavy (2.1) označovať K*.*

Definícia 20 *Dve sústavy lineárnych rovníc* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ *nazývame* ekvivalentné, ak majú rovnaké množiny riešení.

Príklad 25 *Rozhodnite, či sú ekvivaletné sústavy lineárnych rovníc* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ *a* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_3$*, ak*

$$\mathcal{S}_1 : \begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_3 : \begin{array}{r} 2y_1 - y_2 = 0 \\ -y_1 - y_2 = 1 \end{array}.$$

Definícia 21 Lineárnou kombináciou rovníc *zo sústavy (2.1) s koeficientami* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *nazývame lineárnu rovnicu*

$$\begin{array}{l} \quad\alpha_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \\ + \alpha_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) + \\ + \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad + \\ + \alpha_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) = \\ = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m. \end{array}$$

Definícia 22 *Elementárnou úpravou sústav lineárnych rovníc nazývame každú úpravu, pomocou ktorej z ľubovoľnej sústavy lineárnych rovníc* $\mathcal{S}$ *vznikne sústava lineárnych rovníc* $\mathcal{S}'$ ekvivalentná s $\mathcal{S}$*.*

Veta 16 *Nasledujúce úpravy sú ekvivalentnými úpravami sústav lineárnych rovníc.*

1. Vzájomná výmena dvoch rovníc sústavy.

2. Nahradenie rovnice sústavy jej nenulovým násobkom.

3. Nahradenie rovnice sústavy súčtom tejto rovnice a ľubovoľného násobku inej rovnice sústavy.

4. Vynechanie rovnice, ktorá je lineárnou kombináciou iných rovníc sústavy.

2.2.2 Gaussova eliminačná metóda riešenia sústav lineárnych rovníc

Táto metóda spočíva v úprave danej sústavy lineárnych rovníc pomocou elementárnych úprav na sústavu s ňou ekvivaletnú, ktorej riešenie vieme ľahšie nájsť. Takou je sústava lineárnych rovníc, ktorej rozšírená matica je stupňovitá alebo ešte lepšie redukovaná stupňovitá. Keďže sústava lineárnych rovníc je jednoznačne určená svojou rozšírenou maticou, je výhodné zapisovať sústavy pomocou nich. Uvedomme si ešte, že vykonať na sústave (2.1) elementárnu úpravu

vzájomná výmena j-tej a k-tej rovnice, resp.

nahradenie j-tej rovnice jej α násobkom, resp.

nahradenie j-tej rovnice súčtom tejto rovnice a β-násobku k-tej rovnice, resp.

vynechanie j-tej rovnice zo sústavy

a potom napísať rozšírenú maticu tejto novej sústavy je to isté, ako na rozšírenej matici sústavy (2.1) vykonať

ERO $\mathbf{R}_j :=: \mathbf{R}_k$, resp.

ERO $\mathbf{R}_j := \alpha\mathbf{R}_j$, resp.

ERO $\mathbf{R}_j := \mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$, resp.

Vynechanie j-teho riadku, ktorý je lineárnou kombináciou iných riadkov.*pozor, to nie je ERO!*). V podstate ide o vynechanie nulových riadkov v stupňovitom tvare matice. Toto nám umožňuje získať stupňovitú alebo redukovanú stupňovitú rozšírenú maticu sústavy ekvivaletnej so sústavou (2.1) z jej rozšírenej matice použitím ERO. Pri týchto úpravách budeme používať symboly $\sim$, $\overset{r}{\sim}$ aj v prípade, keď použijeme vyškrtnutie riadku.

Ak pri úprave rozšírenej matice vznikne riadok

$$(0, 0, \ldots, 0 \mid b), \quad \text{kde} \quad b \neq 0$$

znamená to, že v prislúchajúcej sústave je rovnica

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = b$$

ktorá nemá riešenie, a teda ani sústava (2.1) nemá riešenie.

Príklad 26 *Ukážeme, že sústava lineárnych rovníc*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$

nemá riešenie.

Riešenie 6 *Pomocou ERO upravujme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú.*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2}{\sim}$$

$$\underset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Z tvaru posledného riadku vyplýva, že sústava nemá riešenie. □

Uvažujme teraz o situácii, keď máme rozšírenú maticu sústavy upravenú na stupňovitú maticu, ktorá neobsahuje riadok $(0, 0, \dots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b. V tom prípade táto matica, po vyškrtnutí nulových riadkov (tie sú lineárnou kombináciou ostatných), má tvar

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0, & \dots, & 0, & \boxed{d_{1k_1}}, & \dots, & d_{1k_2}, & \dots, & d_{1k_r}, & \dots, & d_{1k_n} & u_1 \\ 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & \boxed{d_{2k_2}}, & \dots, & d_{2k_r}, & \dots, & d_{2k_n} & u_2 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & .. \\ 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & \boxed{d_{rk_r}}, & \dots, & d_{rk_n} & u_r \end{array}\right)$$

V rámčekoch sú vedúce prvky riadkov. Je zrejmé, že v takomto prípade prvých $k_1 - 1$ premenných sú fiktívne a je ich možné voliť ľubovolne. Preto budeme uvažovať o situácii, keď matica $\mathbf{D}$ je v tvare

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{d_{11}}, & \dots, & d_{1k_2}, & \dots, & d_{1k_r}, & \dots, & d_{1k_n} & u_1 \\ 0, & \dots, & \boxed{d_{2k_2}}, & \dots, & d_{2k_r}, & \dots, & d_{2k_n} & u_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & & .. \\ 0, & \dots, & 0, & \dots, & \boxed{d_{rk_r}}, & \dots, & d_{rk_n} & u_r \end{array}\right)$$

Keďže vedúce prvky riadkov sa posúvajú aspoň o jedno miesto doprava a v matici nemôže byť riadok $(0, 0, \dots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b, musí platiť

$$r \le n, \; 1 < k_2 < \cdots < k_r \le n$$

Napíšme k matici $\mathbf{D}$ príslušnú sústavu lineárnych rovníc, na ktorej urobíme ešte malú úpravu: na ľavej strane rovníc nechajme len neznáme $x_1, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$. Vetky zvyšné neznáme presunieme na pravú stranu.

$$\begin{array}{ccccccccc} d_{11}x_1 & + & d_{1k_2}x_{k_2} & + & \cdots & + & d_{1k_r}x_{k_r} & = & u_1 - \sum\limits_{j\in M} d_{1j}x_j \\ & & d_{2k_2}x_{k_2} & + & \cdots & + & d_{2k_r}x_{k_r} & = & u_2 - \sum\limits_{j\in M} d_{2j}x_j \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & & & d_{rk_r}x_{k_r} & = & u_r - \sum\limits_{j\in M} d_{rj}x_j \end{array} \tag{2.2}$$

kde $M = \{2, \dots, n\} \setminus \{k_2, \dots, k_r\}$. Táto sústava je ekvivaletná so sústavou (2.1) a navyše dajú sa ľahko nájsť všetky jej riešenia. Ak totiž za neznáme

x_j pre $j \in M$ (týchto neznámych je $n-r$) dosadíme konkrétne čísla, dá sa zo sústavy (2.2) vypočítať zostávajúcich r neznámych: z poslednej rovnice môžeme vypočítať x_{k_r}, túto hodnotu keď dosadíme do predposlejnej rovnice, vypočítame odtiaľ $x_{k_{r-1}}$, atď až z prvej rovnice vypočítame x_{k_1}. Je zrejmé, že ak $n-r=0$ (žiadna z neznámych sa nedá voliť ľubovoľne), tak sústava (2.2) má jediné riešenie, ak $n-r>0$, tak sústava (2.2) má nekonečne veľa riešení.

Keby sme rozšírenú maticu sústavy (2.2) upravili až na redukovanú stupňovitú, tak vedúce prvky jej riadkov by boli jednotky a všetky prvky nad nimi nuly, teda $d_{11} = d_{2k_2} = \cdots = d_{rk_r} = 1$, $d_{1k_2} = 0$, $d_{1k_3} = d_{2k_3} = 0, \ldots, d_{1k_r} = d_{2k_r} = \cdots = d_{r-1\,k_r} = 0$. K tejto matici prislúchajúca sústava lineárnych rovníc má po prenesení neznámych x_j pre $j \in M$ na pravú stranu tvar

$$\begin{array}{rl} x_1 \qquad\qquad\qquad & = u_1 - \sum\limits_{j\in M} d_{1j}x_j \\ x_{k_2} \qquad\quad & = u_2 - \sum\limits_{j\in M} d_{2j}x_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{k_r} & = u_r - \sum\limits_{j\in M} d_{rj}x_j \end{array} \tag{2.3}$$

kde neznáme $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ sú už priamo vyjadrené pomocou zvyšných neznámych.

Na záver môžeme napísať: Ak v upravenej rozšírenej matici sústavy (2.1) na stupňovitú maticu $\mathbf{D}$ sa nachádza riadok $(0, 0, \ldots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b, tak sústava (2.1) nemá riešenie. Ak matica $\mathbf{D}$ tento riadok neobsahuje a pre počet r jej nenulových riadkov platí

$$1 \le r \begin{cases} = n, & \text{tak sústava (2.1) má jedno riešenie} \\ < n, & \text{tak sústava (2.1) má nekonečne veľa riešení} \end{cases}$$

Príklad 27 *V* $\mathbb{R}$ *riešte sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$[K = \{(1, -2, 0)\}]$.

Príklad 28 *V* $\mathbb{R}$ *riešte sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 \phantom{{}+2x_3} + 3x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$\left[K = \left\{\left(2+t,\ t,\ \frac{5}{2},\ -1\right);\ t \in \mathbb{R}\right\}\right].$

Výber neznámych, za ktoré môžeme voliť ľuboľné hodnoty by nemal byť byť náhodný. Pri náhodnom výbere by sa mohlo stať, že sústavu, ktorá pri vhodne zvolených parametroch má jednoznačné riešenie, musíme riešiť pomerne obtiažnym spôsobom.

Príklad 29 *Uvaбujme o sústave lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$, *ktorej rozšírenou maticou je stupňovitá matica*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

má zrejme riešenie a dve neznáme môžeme voliť ľubovoľne. Tí ktorí už majú isté skúsenosti z riešenia rovníc vidia, že za parametre je vhodné voliť x_3 *a* x_4. *My ale za parametre zvolíme* $x_1 = t$ *a* $x_4 = s$. *Potom pomocou matice* $\mathbf{A}$ *môžeme napísať sústavu*

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 + 2x_3 & = & 2 - t - s \\ 2x_2 + 2x_3 & = & -1 + s \end{array}$$

Táto sústava pre ľubovoľné hodnoty t *a* s *nemá riešenie, lebo ak od prvej rovnice odčítame druhú, dostaneme rovnicu*

$$0\,x_2 + 0\,x_3 = 3 - t - 2s.$$

Tu by sa núkalo konštatovanie, že daná rovnica nemá riešenie. Ale z tejto rovnice je len zrejmé, že nemôžeme s *a* t *voliť ľubovolne. Lebo tieto parametre sú viazané vzťahom* $0 = 3 - t - 2s$. *Je zaujímavé, že aj za týchto okolností je možné nájsť všetky riešenia danej sústavy rovníc. Túto úlohu ponechávame ako cvičenie.* $\square$

Pri úprave rozšírenej matice sústavy lineárnych rovníc na stupňovitú, môžeme použiť aj jednu ESO, a to vzájomnú výmenu dvoch stĺpcov. Nesmie však byť medzi nimi pravá strana sústavy. Tejto ESO odpovedá v sústave rovníc len zmena poradia neznámych. Jej použitie môže zjednodušiť úpravu matice na stupňovitý tvar.

Príklad 30 *Riešte v* $\mathbb{R}$ *homogénnu sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 - 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}$$

Riešenie 7 *Posledný stĺpec rozšírenej matice tejto sústavy je nulový a použitím ktorejkoľvek ERO sa nezmení, preto ho nebudeme písať.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{S}_1:=:\mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_2:=:\mathbf{S}_4}}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_1}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_3:=:\mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_3:=-1\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vedúce prvky riadkov nie sú v štvrtom a piatom stĺpci. V týchto stĺpcoch sú koeficienty pri neznámych x_2 a x_5 (menili sme poradie neznámych). Tieto neznáme volíme ľubovoľne: $x_2 = t$, $x_5 = s$, pričom $t, s \in \mathbb{R}$. Z matice potom dostaneme

$$\begin{aligned} x_3 &= = -t + 5s \\ x_4 &= = 2t - 15s \\ x_1 &= = -2t + 7s \end{aligned}$$

Riešením sústavy je každá pätica $K = (-2t+7s,\ t,\ -t+5s,\ 2t-15s,\ s)$, kde $t, s \in \mathbb{R}$.$\square$

2.2.3 Cvičenia

1. Rozhodnite, či sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ sú ekvivalentné, ak

   (a) $\mathcal{S}_1 : \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{aligned} 2y_1 + y_2 - 3y_3 &= 2 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 &= 1 \end{aligned}$

   [áno] .

(b) $\mathcal{S}_1: \begin{array}{rcl} 2x_1+\ x_2-3x_3 &=& 2 \\ x_1-3x_2-2x_3 &=& 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_2: \begin{array}{rcl} 2x_1+\ x_2-3x_3 &=& 2 \\ 3x_1-2x_2-\ x_3 &=& 3 \end{array}$

[nie] .

2. Riešte sústavu lineárnych rovníc

(a) $\begin{array}{rcr} 3x_1-2x_2+3x_3 &=& 3 \\ -2x_1+3x_2-5x_3 &=& -3 \\ x_1+7x_2-3x_3 &=& 16 \end{array}$ .... $[K=\{(1,\,3,\,2)\}]$.

(b) $\begin{array}{rcl} -2x_1+3x_2+5x_3 &=& 3 \\ 3x_1+\ x_2-4x_3 &=& 5 \\ 4x_1+5x_2-3x_3 &=& 8 \end{array}$ .... [nemá riešenie] .

(c) $\begin{array}{rcr} 5x_1+2x_2+4x_3+\ x_4 &=& 9 \\ -2x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4 &=& 5 \\ -4x_1+4x_2\qquad -2x_4 &=& 18 \\ 7x_1+3x_2+7x_3+2x_4 &=& 12 \\ 3x_1+2x_2+2x_3\qquad &=& 10 \end{array}$

$\left[K=\left\{\left(\frac{2}{3},\,\frac{31}{6}+t,\,-\frac{7}{6}-t,\,2t\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}\right]$.

(d) $\begin{array}{rcr} 2x_1-3x_2+\ x_3-\ x_4 &=& 3 \\ -x_1-2x_2-\ x_3+2x_4 &=& -2 \\ -x_1-9x_2-2x_3+5x_4 &=& 0 \end{array}$ .... [nemá riešenie] .

(e) $\begin{array}{rcr} 2x_1-2x_2-3x_3+\ x_4-\ 4x_5 &=& 11 \\ 3x_1-3x_2+2x_3-2x_4+\ \ x_5 &=& -7 \\ 5x_1-5x_2-2x_3+3x_4-11x_5 &=& 18 \\ 2x_1-2x_2+\ x_3\qquad -\ 2x_5 &=& 0 \end{array}$

$[K=\{(1+a+b,\,a,\,-2,\,3+2b,\,b),\ a,b\in\mathbb{R}\}]$.

(f) $\begin{array}{rcl} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5 &=& 0 \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5 &=& 0 \\ -3x_1+\ x_2-6x_3-5x_4+4x_5 &=& 0 \\ 3x_1-\ x_2+4x_3+4x_4-\ x_5 &=& 0 \end{array}$

$$\left[K=\left\{\left(\frac{a-2b-5c}{3},\,a,\,\frac{-b+3c}{2},\,b,\,c\right),\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\right].$$

3. Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a\in\mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &-& 6y &+& 2z &=& -4a-2 \\ 3x &+& 3y &+& 4z &=& 3a-6 \\ 2x &-& 33y &+& 6z &=& -21a \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \emptyset \text{ pre } a\neq -2 \\ \left\{\left(-24-15t,\,t,\,15+\dfrac{21}{2}t\right);\ t\in\mathbb{R}\right\} \text{ pre } a=-2 \end{array}\right].$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \emptyset \text{ pre } a=-2 \\ \{(1-t-s,\, t,\, s);\ t\in\mathbb{R}\} \text{ pre } a=1 \\ \left\{\left(\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}\right)\right\} \text{ pre } a\neq -2,1 \end{array}\right].$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} ax_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2a+2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -a^2x_1 & - & x_2 & + & (1+a)x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ak} a=-\frac{1}{2}, \text{tak } K=\emptyset. \\ \text{Ak}\quad a=\frac{1}{2},\quad \text{tak } K=\left\{\left(\frac{1}{4},\ t,\ -\frac{3}{8},\ \frac{13}{8}+t\right);t\in\mathbb{R}\right\}. \\ \text{Ak}\quad a\neq\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\quad \text{tak } K=\left\{\left(t,\ \frac{2a^2}{4a^2-1}-\frac{t}{2a-1},\ -\frac{2a}{2a+1}+at,\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left.\frac{4a^3+8a^2-2a-1}{4a^2-1}+\frac{-2a^2+a-1}{2a-1}t\right);t\in\mathbb{R}\right\} \end{array}\right].$$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametrov $a, b \in \mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcl} 2x+ay-3z & = & 2 \\ x+y-z & = & 1 \\ -x+by+z & = & 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ a\in\mathbb{R},\ b=-1: K=\emptyset \\ 2.\ a\in\mathbb{R},\ b\neq -1: K=\left\{\left(\dfrac{4a+b-11}{b+1}, \dfrac{4}{b+1}, \dfrac{4(a-2)}{b+1}\right)\right\} \end{array}\right].$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ 6x-3y+bz & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ a=-2,\ b=-3: K=\emptyset \\ 2.\ a=-2, b\neq -3: K=\left\{\left(t, 1-at-\dfrac{5}{b+3}, \dfrac{5}{b+3}\right);\ t\in\mathbb{R}\right\} \\ 3.\ a\neq -2, b\in\mathbb{R}: K=\left\{\left(\dfrac{5-(b+3)t}{6+3a}, 1-t-a\dfrac{5-(b+3)t}{6+3a}, t\right);\ t\in\mathbb{R}\right\} \end{array}\right].$$

2.3 Lineárne priestory

Definícia 23 Kartézskym súčinom n *neprázdnych množín*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

nazývame množinu

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in M_i\}.$$

Jej prvky nazývame usporiadané n-tice *(stručne n-tice). Ak*

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M,$$

tak kartezsky súčin $M \times M \times \ldots \times M$ *označujeme* M^n. *Dve n-tice*

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

sa rovnajú

$$\bar{x} = \bar{y} \Longleftrightarrow\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Usporiadanú n-ticu $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálnych čísel nazývame tiež *vektorom.* čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame *zložky*) vektora $\bar{x}$.

Na množine $\mathbb{R}^n$ definujeme operáciu *súčtu* dvoch n-tíc, ktorú budeme označovať $+$, a *súčinu reálneho čísla a n*-tice.

Definícia 24 *Pre každé* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *definujeme*

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Definícia 25 *Množinu* $\mathbb{R}^n$ *s vyššie definovanými operáciami súčtu vektorov a súčinu čísla a vektora nazývame* reálny lineárny priestor.

Budeme používať nasledujúce označenia a názvy:

$\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – *nulový vektor* (*nulová n-tica*),
$-\bar{x} = (-1) \cdot \bar{x}$ – *opačný vektor* (*opačná n-tica*) k vektoru (n-tici) $\bar{x}$,
$\bar{0} - \bar{x} = \bar{0} + (-\bar{x})$

Veta 17 *Pre každé* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *platí:*

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ *komutatívny zákon*
2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ *asociatívny zákon*
3. $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$
4. $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$
5. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
6. $(\alpha\beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$
7. $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}$
8. $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$
9. $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0}$ *práve vtedy, keď* $\alpha = 0$ *alebo* $\bar{x} = \bar{0}$.

Podobne, ako pri súčine reálnych čísel namiesto $a \cdot b$ píšeme často ab, aj tu budeme obvykle písať $\alpha\bar{x}$, namiesto $\alpha \cdot \bar{x}$.

Definícia 26 *Nech* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. *Vektor*

$$\bar{x} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k$$

sa nazýva lineárna kombinácia *vektorov* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$. *čísla* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *sa nazývajú* koeficienty lineárnej kombinácie *týchto vektorov.*

Príklad 31 *Vektor*

$$(2, -5, -1) = 2(1, -1, 1) + 0(1, 2, 1) - 3(0, 1, 1)$$

je lineárnou kombináciou trojíc (vektorov) $(1, -1, 1),\ (1, 2, 1),\ (0, 1, 1)$. $\square$

Definícia 27 *Hovoríme, že* n*-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *sú* lineárne závislé, *ak existujú čísla* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, *z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly tak, že platí*

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k = \bar{0}$$

Vektory $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$, *ktoré nie sú lineárne závislé, sa nazývajú* lineárne nezávislé.

Príklad 32 *Ukážte, že* n*-tice*

$$(1, 0, 0, \ldots, 0, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1, 0), (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$$

z $\mathbb{R}^n$ *sú lineárne nezávislé.*

Príklad 33 *Zistite, či sú trojice*

$$(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$$

lineárne závislé alebo nezávislé.

Lineárnu nezávislosť n-tíc, môžeme charakterizovať, podobne ako lineárnu závislosť, pomocou lineárnej kombinácie n-tíc. Stačí definíciu linárnej závislosti negovať a dostaneme:

Hovoríme, že n-tice $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ sú *lineárne nezávislé,* ak pre všetky $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ z rovnosti

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k = \bar{0}$$

vyplýva

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Veta 18 *Nech pre n-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ *platí aspoň jedna z podmienok:*
1. existuje $j \in \{1, \dots, k\}$ *tak, že* $\bar{x}_j = \bar{0}$
2. existujú $r, s \in \{1, \dots, k\}$, $r < s$ *tak, že* $\bar{x}_r = \bar{x}_s$.
Potom n-tice $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ *sú lineárne závislé.*

Veta 19 *Vektor* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *je lineárne závislý práve vtedy, keď* $\bar{x} = \bar{0}$.

Veta 20 *Vektory* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ *pre* $k \geq 2$ *sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je linárnou kombináciou ostatných.*

Veta 21 *Nech n-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ $(k \geq 1)$ *sú lineárne závislé a nech* $\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_m$ $(m \geq k+1)$ *sú ľubovoľné n-tice. Potom n-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_m$ *sú lineárne závislé.*

Veta 22 *Ak sú n-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ *lineárne nezávislé, tak sú lineárne nezávislé aj n-tice* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ $(k \leq m)$.

2.4 Vlastnosti matíc

2.4.1 Hodnosť matice

Veta 23 *Nech matica* **B** *vznikne z matice* **A** *jednou ERO resp. ESO. Potom platí*
1. ak sú riadky matice **A** *lineárne nezávislé, tak sú lineárne nezávislé aj riadky matice* **B**.
2. ak sú riadky matice **A** *lineárne závislé, tak sú lineárne závislé aj riadky matice* **B**.
3. maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v maticiach **A**, **B** *je rovnaký.*

Veta 24 *Nech matica* **B** *vznikne z matice* **A** *jednou ERO resp. ESO. Potom platí:*
1. ak sú stĺpce matice **A** *lineárne nezávislé, tak sú lineárne nezávislé aj stĺpce matice* **B**.
2. ak sú stĺpce matice **A** *lineárne závislé, tak sú lineárne závislé aj stĺpce matice* **B**.
3. Maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov v maticiach **A**, **B** *je rovnaký.*

Veta 25 *Nenulové riadky stupňovitej matice sú linárne nezávislé.*

Veta 26 *V každej matici sa maximálny počet lineárne nezávislých riadkov rovná maximálnemu počtu lineárne nezávislých stĺpcov.*

Definícia 28 Hodnosťou matice **A** *nazývame maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice* **A** *a označujeme ju* $h(\mathbf{A})$.

Definícia 29 Trasponovanou maticou *k matici* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$ *nazývame maticu* $\mathbf{A}^T = (a'_{kj})_m^n$, *kde* $a'_{kj} = a_{jk}$ *pre všetky* j, k.

Príklad 34 *Transponovanou maticou k matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.\square$$

Veta 27 *Nech* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *sú matice typu* $m \times n$, *potom*

1. $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m,\ n\}$,

2. ak $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *tak* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$,

3. $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$.

Príklad 35 *Pomocou ERO matíc zistite, či nasledujúce vektory sú lineárne závislé, alebo nezávislé: a)* $(1, 2, 0), (2, 1.2), (4, 0, 1)$.

b) $(2, 0, 3, 4), (-3, 1, 2, 1), (1, 1, 8, 9)$.

Príklad 36 *Určte hodnosť matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & a & 10 & 1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{pmatrix}$$

v závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$.

Veta 28 *(Frobeniova veta) Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.*

Veta 29 *Nech* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$, *kde* $\mathbf{A}$ *je matica sústavy (2.1) s* n *neznámymi a* $\mathbf{B}$ *je jej pravá strana. Potom*

ak $r = n$, *sústava (2.1) má práve jedno riešenie,*

ak $r < n$, *sústava (2.1) má nekonečne veľa riešení, pričom* $n - r$ *premenných je možné voliť ľubovoľne.*

2.4.2 Cvičenia

1. Určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} -2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & -1 \end{pmatrix}$ .... [2] .

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ 4, & -6, & 2 \end{pmatrix}$ .... [1] .

(c) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 1 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \\ 4, & 5, & 1, & 2, & 3 \\ 5, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ .... [5] .

(d) $\begin{pmatrix} 81, & 90, & 67, & 107 \\ 21, & 15, & 23, & 11 \\ 39, & 60, & 21, & 85 \\ 99, & 135, & 65, & 181 \\ 120, & 150, & 88, & 192 \end{pmatrix}$ .... [5] .

2. Vzávislosti od parametrov a, $b \in \mathbb{R}$ určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2, & -a \\ 2, & 2, & -a, & 2 \\ 2, & -a, & 2, & 2 \\ -a, & 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$

$[1 \quad \text{pre} \quad a = -2, 3 \quad \text{pre} \quad a = 6, 4 \quad \text{pre} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\, 6\}]$.

(b) $\begin{pmatrix} a, & b, & 1, & 0 \\ b, & a, & -1, & 0 \\ a+b, & a+b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a+b \end{pmatrix}$

$[1 \quad \text{pre} \quad a = -b, 3 \quad \text{pre} \quad a \neq -b]$.

2.4.3 Špeciálne typy matíc

Definícia 30 • *Matica typu $n \times n$ sa nazýva štvorcová matica stupňa n.*

- *Štvorcová matica sa nazýva* diagonálna*, ak všetky prvky mimo hlavnej diagonály sa rovnajú nule,*
- *Štvorcová matica sa nazýva* jednotková*, ak je diagonálna a všetky prvky na hlavnej diagonále sú jednotky (označujeme ju $\mathbf{I}$ alebo $\mathbf{I}_n$).*

- *Štvorcová matica* $\mathbf{A}$ *stupňa* n *sa nazýva regulárna, ak* $h(\mathbf{A}) = n$.
- *Štvorcová matica* $\mathbf{A}$ *stupňa* n *sa nazýva singulárna, ak* $h(\mathbf{A}) < n$,

Veta 30 *Matica* $\mathbf{A}$ *je regulárna práve vtedy, keď* $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{I}$.

2.4.4 Operácie s maticami

Definícia 31 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_n^m$ *sú matice typu* $m \times n$. Súčtom matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *nazývame maticu*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{jk} + b_{jk})_n^m$$

Súčinom čísla α a matice A *nazývame maticu*

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{jk})_n^m$$

Príklad 37 *Vypočítajte* $\mathbf{A} - 3\,\mathbf{B}$, *ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5, & -4, & 3 \\ -2, & 7, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & -4, & 2 \\ 2, & 3, & -1 \end{pmatrix}.$$

Veta 31 *Pre každé matice* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,
3. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$,
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

Definícia 32 *Súčin matíc definujeme v dvoch krokoch.*

Nech $\in \mathbb{R}^{1\times n}$ *a* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *sú také matice, že* $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *riadkový vektor a* $\mathbf{B}^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *(*$\mathbf{B}$ *je stĺpcový vektor.) Potom súčinom matíc* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *(v tomto poradí) nazývame jednoprvkovú maticu (číslo):*

$$\mathbf{AB} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n).$$

Je to tzv. skalárny súčin n*-tíc* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *a* $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Súčinom matíc $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *(v tomto poradí) nazývame maticu* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *definovanú takto: ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n),$$

kde $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ *sú riadky matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$ *sú stĺpce matice* $\mathbf{B}$, *tak*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_n \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_m\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_m\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_m\mathbf{B}_n \end{pmatrix}$$

Súčin matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *budeme označovať* $\mathbf{AB}$.

Príklad 38 *Vypočítajte* $\mathbf{AB}$ *a* $\mathbf{BA}$*, ak*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix},$

b) $\mathbf{A} = (-3,\ 2,\ 1), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ -2, & 2 \end{pmatrix}.$

Poznámka 2 *1. Na predchádzajúcom príklade sa dá ľahko ukázať, že násobenie matíc nie je komutatívne.*

2. Ak $\mathbf{A} = (a_{js})_p^m, \mathbf{B} = (b_{sk})_n^p$*, tak* $\mathbf{AB} = (c_{jk})_n^m$*, kde*

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jp}b_{pk} = \sum_{s=1}^{p} a_{js}b_{sk}$$

Veta 32 *Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p\times q}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{AD})\mathbf{G} = \mathbf{A}(\mathbf{DG})$,
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{D} = \mathbf{AD} + \mathbf{BD}$,
4. $\mathbf{H}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{HA} + \mathbf{HB}$,
5. $\alpha(\mathbf{AD}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{D} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{D})$,
6. $(\mathbf{AD})^T = \mathbf{D}^T\mathbf{A}^T$.

2.4.5 Cvičenia

1. Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & -3 \\ 0, & 3, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = (2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

sú

(a) diagonálne ....[$\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$].

(b) dolné trojuholníkové ....[$\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$].

(c) horné trojuholníkové ....[$\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$].

2. Pre matice $\mathbf{A}$ až $\mathbf{P}$ z predchádzajúcej úlohy vypočítajte:

(a) $3\mathbf{E}+\mathbf{J}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 4, & 3 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}\right]$.

(b) $2\mathbf{A}-3\mathbf{G}$ ....[nie je definované].

(c) $\mathbf{D}^T$, $\mathbf{F}^T$ .... $\left[\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \\ 0, & 0 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{F}^T = (1, 0, 3, 4)\right]$.

(d) $-2\mathbf{G}-5\mathbf{H}^T$ .... $\left[\begin{pmatrix} -7, & -4, & 0 \\ 4, & 0, & 6 \\ -15, & -1, & -10 \end{pmatrix}\right]$.

(e) $\mathbf{AD}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 2, & 0, & 3 \\ -1, & 4, & 0, & 11 \end{pmatrix}\right]$.

(f) $\mathbf{PF}$ .... [11].

(g) $\mathbf{FP}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 2, & 0, & -1, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & 0, & -3, & 9 \\ 8, & 0, & -4, & 12 \end{pmatrix}\right]$.

(h) $\mathbf{K}^2$ .... $\left[\begin{pmatrix} \cos 2\alpha, & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha, & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\right]$.

(i) $\mathbf{GLD}^T$ .... $\left[\begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 1, & -15 \\ -5, & 31 \end{pmatrix}\right]$.

2.4.6 Maticové rovnice

Operácia súčinu matíc nám umožňuje takýto zápis sústavy lineárnych rovníc (1):

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

alebo

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

kde $\mathbf{A}$ je matica sústavy, $\mathbf{X}$ je stĺpec neznámych a $\mathbf{B}$ je pravá strana sústavy. Je to maticová rovnica. Môžeme sa zaoberať aj všeobecnejším prípadom tejto rovnice, keď matica $\mathbf{B}$ má viac stĺpcov ako jeden. Aby bol definovaný šúčin $\mathbf{AX}$ a rovnal sa matici $\mathbf{B}$, musia mať matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rovnaký počet riadkov a matica $\mathbf{X}$ musí mať toľko riadkov ako má matica $\mathbf{A}$ stĺpcov. Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je typu $m \times p$, potom $\mathbf{X}$ je matica typu $n \times p$. Nech $\mathbf{B}_k$ pre $k \in \{1, \ldots, p\}$ sú stĺpce matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{X}_k$ sú stĺpce matice $\mathbf{X}$, čiže $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_p)$ a $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}, \mathbf{X}_p)$ Potom maticovú rovnicu

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad \text{čiže} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_p) = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_p) \tag{2.4}$$

môžeme písať v tvare

$$\mathbf{AX_1} = \mathbf{B_1}, \ \mathbf{AX_2} = \mathbf{B_2}, \ \ldots, \ \mathbf{AX_p} = \mathbf{B_p} \tag{2.5}$$

Každá z maticových rovníc $\mathbf{AX_k} = \mathbf{B_k}$ je vlastne sústavou m lineárnych rovníc o n neznámych s maticou sústavy $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{B_k}$. Maticová rovnica (2.4) má riešenie práve vtedy, keď má riešenie každá sústava lineárnych rovníc v (2.5), t.j. keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B_k})$ pre $k \in \{1, \ldots, p\}$. To nastane práve vtedy, keď stĺpce matice $\mathbf{B}$ sú lineárnou kombináciou stĺpcov matice $\mathbf{A}$, čiže keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Počet riešení rovnice (2.4) závisí od počtu riešení sústav rovníc v (2.5). Môžeme vysloviť vetu:

Veta 33 *Maticová rovnica $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je typu $m \times p$ má riešenie práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$,*
Ak $r = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ a
$r = n$, rovnica (2.4) má práve jedno riešenie,
$r < n$, rovnica (2.4) má nekonečne veľa riešení.

Riešenie rovnice (2.4) dostaneme tak, že vyriešime všetky sústavy v (2.5). Keďže majú rovnakú maticu sústavy, môžeme ich riešiť naraz tak, že vedľa matice sústavy napíšeme pravú stranu prvej sústavy, hneď vedľa pravú stranu druhej sústavy až poslednej sústavy, čím napíšeme maticu $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Tú upravíme na stupňovitú maticu a z nej určíme riešenia jednotlivých sústav zo (2.5).

Príklad 39 *Riešte maticovú rovnicu* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$*, ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & -3, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 1 \\ 4, & 3, & 5, & 1 \\ 5, & 4, & 9, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3, & 1 \\ 1, & 3 \\ 5, & -7 \\ 9, & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} -7+7r-s, & 5+7u-v \\ 11-11r+s, & -9-11u+v \\ r, & u \\ s, & v \end{pmatrix}, \text{ kde } r,s,u,v \in \mathbb{R}. \right]$$

Maticovú rovnicu $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ riešime tak, že ju transponujeme, tým získame rovnicu $\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, ktorú už vieme riešiť.

Príklad 40 *V množine reálnych čísel riešte rovnicu* $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$*, ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5, & -1 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 8 *Použitím substitúcie* $\mathbf{XB} = \mathbf{E}$ *dostaneme rovnicu* $\mathbf{AE} = \mathbf{D}$*. Nájdime jej riešenie:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 1 & 5, & -1 \\ -1, & 1 & -1, & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 1 & 5, & -1 \\ 0, & 3 & 3, & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 0 & 4, & -4 \\ 0, & 1 & 1, & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & 2, & -2 \\ 0, & 1 & 1, & 3 \end{array}\right).$$

Rovnica má jedno riešenie, lebo $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{D}) = 2$ *a počet stĺpcov matice* $\mathbf{A}$ *je tiež* 2*. Tým riešením je zrejme*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2, & -2 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Ostáva nám vyriešiť rovnicu

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & -2 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Transponovaním dostaneme rovnicu

$$\begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešme ju

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 1 & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 1 & -2, & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 1 & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2 & 0, & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 0 & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 2 \end{array}\right)$$

Hodnosť oboch matíc $\mathbf{B}^T$, $(\mathbf{B}^T|\mathbf{E}^T)$ *je 2, počet stĺpcov matice* $\mathbf{B}^T$ *je 3, takže jednu neznámu v každom stĺpci matice* $\mathbf{X}^T$ *volíme ľubovoľne.*

$$\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2+t, & -1+s \\ t, & s \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

a teda

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2+t, & t, & 0 \\ -1+s, & s. & 2 \end{pmatrix}, \text{ kde } t, s \in \mathbb{R}$$

□

Na riešenie iných typov maticových rovníc môžeme použiť základnú metódu: určiť typ neznámej matice, označiť si jej prvky, vykonať požadované operácie a porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme sústavu rovníc, ktorú vyriešime.

Príklad 41 *Riešte rovnicu* $\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \mathbf{X}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Riešenie 9 *Aby boli definované uvedené súčiny, musí byť matica* $\mathbf{X}$ *štvorcová, stupňa 2.*
Nech $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}$. *Dosaďme a upravme*

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_3, & x_2 - x_4 \\ 2x_1 + x_3, & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2, & -x_1 + x_2 \\ x_3 + 2x_4, & -x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x_2 - x_3, & x_1 - x_4 \\ 2x_1 - 2x_4, & 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Porovnaním prvkov dostaneme homogénnu sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -2x_2 - x_3 &= = 0 \\ x_1 - x_4 &= = 0 \\ 2x_1 - 2x_4 &= = 0 \\ 2x_2 + x_3 &= = 0 \end{aligned}$$

ktorú vyriešime

$$\begin{pmatrix} 0, & -2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 0, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Zvoľme $x_3 = 2t,\ x_4 = s,$ *potom* $x_1 = s,\ x_2 = -t.$
Riešením maticovej rovnice je každá matica $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} s, & -t \\ 2t, & s \end{pmatrix}$, *kde* $t, s \in \mathbb{R}$.
□

2.4.7 Cvičenia

Riešte maticové rovnice:

1. $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 3, & 2, & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 11, & 3 \end{pmatrix}$

   $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5-t, & 3-s \\ -2+2t, & -3+2s \\ t, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbb{R} \right].$

2. $\begin{pmatrix} 2, & -3 \\ 1, & -2 \\ -3, & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 1, & 0 \\ 2, & -4 \end{pmatrix}$ .... [nemá riešenie] .

3. $\mathbf{X} \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -4, & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$

   $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1+2t, & t \\ 2s, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbb{R} \right].$

4. $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10, & 9 \\ -5, & 4 \end{pmatrix}$

   $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3-t, & -4+t, & t \\ -2-s, & 1+s, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbb{R} \right].$

5. $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ -2, & -6 \end{pmatrix}$

   $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix} \right].$

2.4.8 Inverzná matica

Definícia 33 *Inverznou maticou k štvorcovej matici* $\mathbf{A}$ *nazývame maticu* $\mathbf{B}$, *pre ktorú platí* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. *Inverznú maticu k matici* $\mathbf{A}$ *(pokiaľ existuje) označujeme* $\mathbf{A}^{-1}$.

Matica $\mathbf{A}^{-1}$ je zrejme štvorcová, toho istého stupňa ako matica $\mathbf{A}$.

Veta 34 *Nech* $\mathbf{A}$ *je matica typu* $m \times p$ *a* $\mathbf{B}$ *je matica typu* $p \times n$*. Potom*

$$h(\mathbf{AB}) \leq \min\{h(\mathbf{A}),\ h(\mathbf{B})\}$$

Veta 35 *K štvorcovej matici* $\mathbf{A}$ *existuje inverzná matica práve vtedy, keď* $\mathbf{A}$ *je regulárna matica.*

Inverzná matica k regulárnej matici $\mathbf{A}$ je riešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$. Keďže matica $\mathbf{A}$ je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}$, môžeme pri riešení uvedenej rovnice postupovať tak, že maticu $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ pomocou ERO (ESO je neprípustná) upravíme na $(\mathbf{I}|\mathbf{B})$. Matica $\mathbf{B}$ je zrejme riešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, a teda $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Príklad 42 *Vypočítajte inverznú maticu k* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -4 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ -2, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 2 \end{pmatrix}.\right]$$

Veta 36 *Nech* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *sú regulárne matice stupňa* n*. Potom*
1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
2. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.

Inverznú maticu je možné použiť aj na riešenie niektorých maticových rovníc.

Príklad 43 *Riešte rovnicu* $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$, *ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -4 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 10 *Matica* $\mathbf{A}$ *je regulárna, lebo jej riadky sú lineárne nezávislé (v opačnom prípade by jeden riadok bol násobkom druhého), teda k nej existuje inverzná matica. K matici* $\mathbf{B}$ *tiež existuje inverzná matica (vypočítali sme ju v predchádzajúcom príklade). Vynásobme rovnicu maticou* $\mathbf{A}^{-1}$ *z ľavej strany a maticou* $\mathbf{B}^{-1}$ *z pravej strany.*

$$\mathbf{A}^{-1} \mid \mathbf{AXB} = \mathbf{D},$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AXB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D},$$

$$\mathbf{XB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D},$$

$$\mathbf{XB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D} \mid \mathbf{B}^{-1},$$

$$\mathbf{XBB}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1},$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1}.$$

Vypočítajme $\mathbf{A}^{-1}$*:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 1 & 1, & 0 \\ 1, & 3 & 0, & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 1 & 1, & 0 \\ 0, & 2 & -1, & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 0 & 3, & -1 \\ 0, & 2 & -1, & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ -2, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4, & -1, & 8 \\ -5, & 4, & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 17, & -7, & 25 \\ -9, & 5, & -9 \end{pmatrix}.\square$$

2.4.9 Cvičenia

1. Vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} 1, & -5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$.

(b) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ .... $\left[\begin{pmatrix} 1, & 2, & 7 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$.

(c) $\begin{pmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -2, & 2, & 2 \\ -1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ .... $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2, & 5, & -8 \\ 2, & 7, & -10 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix}\right]$.

(d) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 3, & 2 \\ 0, & 0, & 3, & 4 \\ 1, & 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}$ ..... $\left[\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24, & -12, & 12, & -12 \\ -6, & 9, & -9, & 6 \\ 8, & -4, & 8, & -8 \\ -6, & 3, & -3, & 6 \end{pmatrix}\right]$.

2. Pomocou inverznej matice riešte maticovú rovnicu:

(a) $\begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ -1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$

$\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 4, & -5, & 1 \end{pmatrix}\right]$.

(b) $\begin{pmatrix} 5, & 3, & 4 \\ -6, & -3, & -5 \\ 4, & 2, & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4, & -6 \\ 3, & 4 \\ 3, & 5 \end{pmatrix} \right].$

2.5 Determinanty

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n, potom budeme používať nasledujúce označenia:

$\mathbf{A}_{jk}$ – matica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím j-teho riadku a k-teho stĺpca $(n \geq 2)$,

Príklad 44 *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

potom napr.

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definícia 34 *Determinantom štvorcovej matice* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$ *nazývame číslo, ktoré označujeme* $\det \mathbf{A}$ *a definujeme takto:*

1. ak $n = 1$, $\det \mathbf{A} = \det(a_{11}) = a_{11}$,

2. ak $n \geq 2$,

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + a_{13} \det \mathbf{A}_{13} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathbf{A}_{1k}$$ *nazývame aj* rozvoj determinantu podľa prvého riadku.

Determinant matice $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, ktorá má riadky $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$ a stĺpce $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ budeme tiež označovať symbolmi

$$|\mathbf{A}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots, & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n|$$

Príklad 45

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}).\square$$

Na výpočet determinantu matice *tretieho stupňa* môžeme použiť *Sarusovo pravidlo*. Postup spočíva v zostrojení schémy, ktorá pozostáva z determinantu a opísaných prvých dvoch riadkov, ktoré sú umiestnené pod determinantom. Potom spočítame súčiny prvkov na hlavnej uhlopriečke a dvoch rovnobežných uhlopriečkach a od tohoto súčtu odpočítame súčin prvkov na vedľajšej uhlopriečke a s ňou rovnobežných dvoch uhlopriečkach. Podobnú schému získame, keď napíšeme prvé dva stĺpce za determinat. **Sarusovo pravidlo neplatí pre determinaty vyšších stupňov**.

Príklad 46 *Použitím Sarusovho pravidla vypočítajme determinant:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Riešenie 11 *Máme*

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 3 \\ & \searrow & & & \\ 3 & & 2 & & 5 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 1 & & 1 & & 2 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 1 & & 0 & & 3 \\ & & & \searrow & \\ 3 & & 2 & & 5 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 3 \\ & & & \swarrow & \\ 3 & & 2 & & 5 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 1 & & 1 & & 2 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 1 & & 0 & & 3 \\ & \swarrow & & & \\ 3 & & 2 & & 5 \end{array}\right) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2) = 2.\square$$

Veta 37 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, $n \geq 2$, *potom*

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{21} \det \mathbf{A}_{21} + a_{31} \det \mathbf{A}_{31} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det \mathbf{A}_{n1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1} - \text{rozvoj determinantu podľa prvého stĺpca.}$$

Príklad 47 *Vypočítajme determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Riešenie 12 *V prvom stĺpci je veľa núl, preto na výpočet použijeme rozvoj podľa prvého stĺpca.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12-2+10-(10+6-4)-2(2+6-1-(-2+2+3)) =$$

$$= 20 - 12 - 2(7-3) = 0.\square$$

Veta 38 *Pre každú štvorcovú maticu* $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbb{A}.$$

Transponovaním matice sa z jej riadkov stanú stĺpce. Preto, na základe predchádzajúcej vety, ak determinant matice závisí určitým spôsobom od jej riadkov, rovnako závisí aj od jej stĺpcov. Z tohto dôvodu budeme vlastnosti determinantov formulovať aj dokazovať len pre riadky. Pre stĺpce si ich dokážete sformulovať sami.

Veta 39 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, $n \geq 2$, *potom pre každé* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{j+1} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2} a_{j2} \det \mathbf{A}_{j2} + \cdots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det \mathbf{A}_{jn} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} \quad \text{- rozvoj determinantu podľa } j\text{-teho riadku.}$$

Príklad 48 *Vypočítajte*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 1 \\ 1 & c & 1 & 2 \\ 2 & d & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Veta 40 *Ak niektorý riadok štvorcovej matice* $\mathbf{A}$ *je nulový, tak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Veta 41 *Nech matica* $\mathbf{B}$ *vznikne zo štvorcovej matice* $\mathbf{A}$ *vzájomnou zámenou dvoch riadkov, potom* $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Veta 42 *Ak štvorcová matica* $\mathbf{A}$ *má dva riadky rovnaké, tak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Veta 43 *Nech matica* $\mathbf{B}$ *vznikne zo štvorcovej matice* $\mathbf{A}$ *vynásobením jej* j*-teho riadku číslom* α*. Potom* $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$, *čiže*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \alpha\mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

Veta 44

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j + \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

Veta 45 *Nech matica* $\mathbf{B}$ *vznikne zo štvorcovej matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$$

nahradením riadku $\mathbf{R}_j$ *riadkom* $\alpha\mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$*, kde* α, β *sú ľubovoľné čísla,* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$*. Potom*

$$\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}.$$

Príklad 49 *Vypočítajme*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 6 & 10 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Riešenie 13 *Pomocou ERO a ESO vytvoríme v niektorom riadku alebo stĺpci čo najviac núl a potom determinant rozvinieme podľa neho:*

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -3, & 4, & 2 \\ 3, & 5, & -1, & 2 \\ 6, & 10, & 1, & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3:=2\mathbf{R}_3-3\mathbf{R}_1}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & -1, & -2, & 0 \\ 0, & 13, & -11, & 1 \\ 0, & 0, & 3, & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} 2 \begin{vmatrix} -1, & -2, & 0 \\ 13, & -11, & 1 \\ 0, & 3, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\mathbf{S}_2:=\mathbf{S}_2+3\mathbf{S}_3}{=} \begin{vmatrix} -1, & -2, & 0 \\ 13, & -8, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1, & -2 \\ 13, & -8 \end{vmatrix} = -(8 + 26) = -34. \square$$

Veta 46 *Ak sú riadky štvorcovej matice* $\mathbf{A}$ *lineárne závislé, tak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Veta 47 *Matica* $\mathbf{A}$ *je regulárna práve vtedy, keď* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Príklad 50 *Zistime, či sú pätice* $(1,1,1,1,1)$, $(1,2,3,4,5)$, $(1,4,9,16,25)$, $(1,8,27,64,125)$, $(1,16,81,256,625)$ *lineárne závislé alebo nezávislé.*

Veta 48 *Nech* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *sú štvorcové matice stupňa* n *a nech* $\mathbf{D}$ *je regulárna matica, potom*

1) $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$
2) $\det \mathbf{D}^{-1} = (\det \mathbf{D})^{-1}$

Veta 49 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})$ *je štvorcová matica stupňa* n *a nech* $r, s \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, *potom*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{sk} \det \mathbf{A}_{rk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & ak\ r = s \\ 0, & ak\ r \neq s \end{cases}$$

Veta 50 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$ *je regulárna matica,* $\mathbf{A}^{-1} = (c_{jk})_n^n$ *je k nej inverzná matica, potom pre každé* $j, k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$

$$c_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\det \mathbf{A}_{kj}}{\det \mathbf{A}}.$$

Príklad 51 *Vypočítajme* $\mathbf{A}^{-1}$ *(pokiaľ existuje), ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie 14

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -1 \\ -2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2, & -7 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -(-4+7) = -3 \neq 0.$$

Matica $\mathbf{A}$ *je regulárna, preto k nej inverzná matica existuje.*

$$\det \mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ \det \mathbf{A}_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \det \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\det \mathbf{A}_{21} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \det \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \det \mathbf{A}_{23} = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\det \mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = -9, \det \mathbf{A}_{32} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \det \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A}_{11}, & -\det \mathbf{A}_{12}, & \det \mathbf{A}_{13} \\ -\det \mathbf{A}_{21}, & \det \mathbf{A}_{22}, & -\det \mathbf{A}_{23} \\ \det \mathbf{A}_{31}, & -\det \mathbf{A}_{32}, & \det \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ -9, & 2, & 2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3, & 0, & 9 \\ 0, & -1, & -2 \\ -3, & 2, & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ -1, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} . \square$$

Veta 51 *(Cramerovo pravidlo) Nech* $\mathbf{A}$ *je regulárna matica stupňa* n, $\mathbf{B}$ *je matica typu* $n \times 1$. *Potom sústava lineárnych rovníc* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *má jediné riešenie:*

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} (\det \mathcal{A}_1, \det \mathcal{A}_2, \ \ldots, \det \mathcal{A}_n)$$

kde $\mathcal{A}_j$ *je matica, ktorá vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahradením* j*-teho stĺpca pravou stranou* $\mathbf{B}$ *sústavy.*

Príklad 52 *Riešme sústavu lineárnych rovníc s parametrom* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \beta x & ++ & y & ++ & z & == & 1 \\ x & ++ & \beta y & ++ & z & == & \beta \\ x & ++ & y & ++ & \beta z & == & \beta^2 \end{array}$$

Riešenie 15 *V prípadoch, kedy je matica sústavy regulárna, vyriešime sústavu Cramerovým pravidlom, v ostatných prípadoch Gaussovou eliminačnou metódou.*

$$D = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta^3 - 3\beta + 2.$$

Pre racionálne korene $\frac{p}{q}$ *rovnice* $\beta^3 - 3\beta + 2 = 0$ *platí* $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$. *Hornerovou schémou zistíme, že 1 je dvojnásobným a -2 jednoduchým koreňom. Potom* $D = \beta^3 - 3\beta + 2 = (\beta - 1)^2(\beta + 2)$.

1. Nech $\beta \neq 1, -2$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta^2 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2+\beta+\beta^3-\beta^3-1-\beta^3 = -\beta^3+\beta^2+\beta-1 = -(\beta-1)^2(\beta+1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta^2 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 2\beta + 1 = (\beta - 1)^2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^4 - 2\beta^2 + 1 = (\beta^2-1)^2 = (\beta-1)^2(\beta+1)^2$$

Riešením sústavy je trojica

$$\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right) = \left(-\frac{\beta+1}{\beta+2},\ \frac{1}{\beta+2},\ \frac{(\beta+1)^2}{\beta+2}\right)$$

2. Nech $\beta = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Riešením sú všetky trojice $(1-s-t,\ s,\ t)$, *kde* $s, t \in \mathbb{R}$.

3. Nech $\beta = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

V tomto prípade sústava nemá riešenie. □

2.5.1 Cvičenia

1. Vypočítajte:

   (a) $\begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 4, & -5 \end{vmatrix}$ .... $[-7]$.

   (b) $\begin{vmatrix} 3, & -2, & 3 \\ 4, & -5, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \end{vmatrix}$ .... $[-25]$.

2. Vyriešte rovnicu ($x \in \mathbb{R}$)

   $$\begin{vmatrix} x, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & -x \\ 3, & x, & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad .... \left[x \in \left\{1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}\right].$$

3. Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca:

   (a) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{vmatrix}$ ...... $\left[-2\begin{vmatrix} 4, & 6 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 4, & 6 \end{vmatrix}\right]$.

(b) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & 1 \\ 4, & -1, & 0, & 5 \\ 3, & 0, & -2, & 1 \\ 3, & 6, & -1, & -2 \end{vmatrix}$

$$\left[2\begin{vmatrix} 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \end{vmatrix}\right].$$

4. Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & a \\ 4, & -1, & 0, & b \\ 3, & 0, & -2, & c \\ 3, & 6, & -1, & d \end{vmatrix}$ .... $[-51a + 84b - 75c - 3d]$.

(b) $\begin{vmatrix} 5, & 2, & -2, & 3 \\ 4, & 2, & 1, & 1 \\ 3, & 6, & -9, & 6 \\ -4, & -1, & 1, & -2 \end{vmatrix}$ .... $[-6]$.

(c) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 3, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ .... $[-10]$.

(d) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 3, & -2, & 7, & 5, & 4 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11 \\ 5, & 5, & 1, & -4, & 8 \\ -2, & -1, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ .... $[0]$.

(e) $\begin{vmatrix} 5, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 7, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 5, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 7, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 5, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 7 \end{vmatrix}$ .... $[2^4 3^4 7]$.

5. Pomocou determinantov vypočítajte, pre aké hodnoty parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ je matica $\mathbf{A}$ regulárna:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & -2, & b \\ -2, & b, & -2 \\ 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$ .... $[a \neq b, b \neq 2]$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & -a \\ 1, & 1, & -a, & 1 \\ 1, & -a, & 1, & 1 \\ -a, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ .... $[a \neq -1,\ 3]$.

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0, & 0, & 0, & b \\ 0, & a, & 0, & 0, & b, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b, & a, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0, & a, & 0 \\ b, & 0, & 0, & 0, & 0, & a \end{pmatrix}$ .... $[a \neq \pm b]$.

6. Pomocou determinantov vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$ .... $\left[\begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$.

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -3 \\ 5, & 1, & -2 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ .... $\left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5, & -4, & 7 \\ -11, & 11, & -11 \\ 7, & -10, & 12 \end{pmatrix}\right]$.

7. Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

(a) $\begin{aligned} 3x-4y+5z &= 1 \\ 2x-3y+z &= -1 \\ 3x-5y-z &= 2 \end{aligned}$ .... $[(-59,\ -37,\ 6)]$.

(b) $\begin{aligned} ax+y+z &= 4 \\ x+by+z &= 3 \\ x+2by+z &= 4 \end{aligned}$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 1,\ b \neq 0\ :\ \left\{\frac{1}{b(1-a)}(1-2b, 1-a, 4b-2ab-1)\right\} \\ a = 1,\ b = \frac{1}{2}\ :\ \{(2-t, 2, t); t \in \mathbb{R}\} \\ a \in \mathbb{R}, b = 0\ :\ \emptyset \\ a = 1, b \neq \frac{1}{2}\ :\ \emptyset \end{array}\right].$$