Určitý integrál

$$-\infty < a < b < \infty$$

Definícia. *Množina* $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, *sa nazýva delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Ak označíme* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, *tak* $\nu(D) = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i$ *sa nazýva norma delenia* D. *Ak* D_z *je delením intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a* $D \subset D_z$, *tak hovoríme, že* D_z *je zjemnením delenia* D.

Definícia. *Nech* $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *je delením intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nech* $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ *je ohraničená funkcia. Číslo*

(a) $\quad \underline{S}(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad m_i = \inf\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x),\ i = 1, 2, \dots, n,$

sa nazýva dolný integrálny súčet funkcie f *pre delenie* D.

(b) $\quad \overline{S}(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad M_i = \sup\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x),\ i = 1, 2, \dots, n,$

sa nazýva horný integrálny súčet funkcie f *pre delenie* D.

Poznámka.
1. Pre dve ľubovoľné delenia D_1, D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ platí: $\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2)$.
2. Ak D_2 je zjemnením delenia D_1 tak platí:

$$\underline{S}(f, D_1) \le \underline{S}(f, D_2),\ \overline{S}(f, D_2) \le \overline{S}(f, D_1).$$

Definícia (Určitý integrál). *Ohraničená funkcia* $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ *sa nazýva (riemannovsky) integrovateľná ak existuje jediné číslo* I *také, že pre každé delenie* D *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *platí:*

$$\underline{S}(f, D) \le I \le \overline{S}(f, D).$$

Číslo I *nazývame určitý integrál funkcie* f *na* $\langle a, b\rangle$ *a označujeme* $I = \int_a^b f(x)\, dx$.

Poznámka. Ak funkcia f je integrovateľná, tak $I = \sup\limits_{D} \underline{S}(f, D) = \inf\limits_{D} \overline{S}(f, D)$.

Poznámka. Určitý integrál nezávisí od integračnej premennej, t.j.

$$I = \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \int_a^b f(t)\, \mathrm{dt} = \int_a^b f(u)\, \mathrm{du} = \dots.$$

Veta (Postačujúca podmienka integrovateľnosti). *Nech* $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ *je ohraničená funkcia a nech je spojitá s výnimkou konečného počtu bodov. Potom f je(riemannovsky) integrovateľná funkcia.*

Vlastnosti určitého integrálu.

Definícia. *Nech* $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ *je (riemannovsky) integrovateľná funkcia. Potom*

$$\int_b^a f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Veta (Linearita integrálu). *Nech* $f, g\colon \langle a, b\rangle \to R$ *sú (riemannovsky) integrovateľné funkcie a nech* $\alpha, \beta \in R$. *Potom* $\alpha f + \beta g\colon \langle a, b\rangle \to R$ *je integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta f(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Veta. *Nech* $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ *je (riemannovsky) integrovateľná funkcia. Potom*

(a) $\forall c \in (a,b) : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. *(Aditivita integrálu.)*

(b) *Ak* $\forall x \in \langle a,b\rangle\colon f(x) \geq 0$, *tak* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(c) $|f|$ *je integrovateľná funkcia a platí* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Veta. *Nech* $f,g\colon \langle a,b\rangle \to R$ *sú integrovateľné funkcie a nech* $\forall x \in \langle a,b\rangle\colon f(x) \leq g(x)$. *Potom* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Veta (o strednej hodnote). *Nech* $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ *je spojitá funkcia. Potom*

$\exists c \in (a,b)\colon \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Číslo $f(c)$ *nazývame strednou hodnotou funkcie* f *na intervale* $\langle a,b\rangle$.

Veta (Hlavná veta integrálneho počtu). *Nech* $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ *je spojitá funkcia. Potom funkcia* $F\colon \langle a,b\rangle \to R$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *je primitívnou funkciou k funkcii* f.

Dôkaz. *Nech* $x_0, x \in \langle a,b\rangle$, $x_0 \neq x$.
1. Nech $x_0 < x$, *funkcia* f *je spojitá, teda je spojitá aj na intervale* $\langle x_0, x\rangle$, *spĺňa predpoklady vety o strednej hodnote,* $\exists c_x \in (x_0,x)\colon \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c_x)(x-x_0)$. *Potom*

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0} = f(c_x) \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0) \Longrightarrow F'(x_0+) = f(x_0).$$

2. Nech $x < x_0$, *funkcia* f *je spojitá, teda je spojitá aj na intervale* $\langle x, x_0\rangle$, $\exists c_x \in (x,x_0)\colon \int_x^{x_0} f(t)\,dt = f(c_x)(x_0-x)$.

$$\int_x^{x_0} f(t)\,dt = -\int_{x_0}^x f(t)\,dt = -f(c_x)(x_0-x) = f(c_x)(x-x_0) \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0) \Longrightarrow F'(x_0-) = f(x_0).$$

$\forall x_0 \in \langle a,b\rangle\colon F'(x_0) = f(x_0)$ *(v krajných bodoch* $F'(a+), F'(b-)$*), t.j.* F *je primitívnou funkciou k funkcii* f.

Veta (Newtonov-Leibnizov vzorec). *Nech* $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ *je spojitá funkcia a* $F\colon \langle a,b\rangle \to R$ *je jej primitívna funkcia. Potom platí:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dôkaz. *Funkcia* $G\colon \langle a,b\rangle \to R$, $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *je primitívnou funkciou k funkcii* f, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. *Nech* F *je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii* f. *Potom* $\exists c \in R\colon F = G + c$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = (F(b)-c) - (F(a)-c) = F(b) - F(a).$$

Metóda per partes pre určitý integrál.

Veta. *Nech $f, g\colon \langle a, b\rangle \to R$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Substitučná metóda pre určitý integrál.

Veta (I.). *Nech J je interval, $\varphi\colon \langle a, b\rangle \to J$ je spojite diferencovateľná funkcia, $f\colon J \to R$ je spojitá funkcia a $F\colon J \to R$ je primitívna funkcia k funkcii f. Potom platí:*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,.$$

Veta (II.). *Nech I je interval, $\varphi\colon I \to \langle a, b\rangle$ je spojite diferencovateľná bijekcia a $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ je spojitá funkcia. Nech $G\colon I \to R$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$. Potom platí:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(\varphi^{-1}(b)) - G(\varphi^{-1}(a))\,.$$

Určitý integrál párnej a nepárnej funkcie na symetrickom intervale.

Veta. *Nech f je integrovateľná funkcia na symetrickom intervale $\langle -a, a\rangle$.*

(a) *Ak f je nepárna funkcia, tak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.*

(b) *Ak f je párna funkcia, tak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.*

Určitý integrál periodickej funkcie.

Veta. *Nech f je periodická funkcia s periódou T a nech je integrovateľná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)\,dx, \qquad k \in Z.$$

Aplikácie určitého integrálu

Obsah rovinného geometrického útvaru.

Nech $f, g\colon \langle a, b\rangle \to R$ sú integrovateľné funkcie a nech $\forall x \in \langle a, b\rangle\colon f(x) \le g(x)$. Množina

$$M = \{(x, y) \in R^2\colon a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

sa nazýva elementárnou oblasťou typu xy. Obsah množiny

$$S(M) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{dx}.$$