5 bodov ♢

1. Dané sú čísla $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ a $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Vypočítajte

(a) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$, (b) $\dfrac{z_1}{z_2^2}$, (c) $\dfrac{z_3^2}{z_2^3}$, (d) $\dfrac{z_1^3}{z_3^2}$, (e) $z_1^3+z_2^3+z_3^2$.

Riešenie:

(a) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3} = \dfrac{9}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(b) $\dfrac{z_1}{z_2^2} = \dfrac{1}{3}(\cos 0 + i\sin 0) = \dfrac{1}{3}$

(c) $\dfrac{z_3^2}{z_2^3} = \dfrac{4}{27}(\cos 0 + i\sin 0) = \dfrac{4}{27}$

(d) $\dfrac{z_1^3}{z_3^2} = \dfrac{27}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 6\frac{3}{4}i$

(e) $$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 + z_3^2 &= 27(\cos\pi + i\sin\pi) + 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) + 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -27 + 27i + 4i = -27 + 31i \end{aligned}$$

7 bodov ♣

2. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré sa nedá pomocou Cramerovho pravidla riešiť sústava rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & az & = & 2 \end{array}$$

Riešenie: sústava lineárnych rovníc sa pomocou Cramerovho pravidla dá riešiť práve vtedy, ked determinant matice sústavy je nenulový. Preto sa sústava lineárnych rovníc nebude dať riešiť Cramerovým pravidlom práve vtedy, keď determinant matice sústavy bude rovný nule. Čiže

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a + 1 - 2a - 4 - 1 + a^2 = a^2 - 4 = 0$$

Rovnica $a^2 - 4 = 0$ má dve riešenia: $a \in \{\pm 2\}$. Všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré sa nedá pomocou Cramerovho pravidla riešiť daná sústava rovníc, sú $a = -2$ a $a = 2$.

7 bodov ♢

3. Nájdite všetky hodnoty parametrov $a, b \in \mathbb{R}$, pre ktoré funkcia

$$f(x) = \begin{cases} a\left(1 - x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right) & , \text{ pre } x < 0, \\ 2 & , \text{ pre } x = 0, \\ \dfrac{\sin 3x}{b\left(\sqrt{3x+9} - 3\right)} & , \text{ pre } x > 0, \end{cases}$$

je spojitá v bode $x = 0$.

Riešenie: na to aby funkcia $f(x)$ bola v bode $x = 0$ spojitá, musia sa limity zľava a zprava v bode 0 rovnať jej funkčnej hodnote v bode 0. Najskôr si vypočítame spomenuté limity zľava

$$\lim_{x \to 0^-} a\left(1 - x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right) = a$$

a zprava

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{b\left(\sqrt{3x+9} - 3\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{b\left(\sqrt{3x+9} - 3\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{3x+9} + 3\right)}{\left(\sqrt{3x+9} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\left(\sqrt{3x+9} + 3\right)}{b} = \frac{6}{b}$$

Funkčná hodnota v bode 0 je $f(0) = 2$. Musí preto platiť $a = 2$ a byť splnená rovnica $\frac{6}{b} = 2$, čiže $b = 3$. Daná funkcia je spojitá v bode $x = 0$ jedine pre hodnoty parametrov $a = 2$ a $b = 3$.

9 bodov ♡

4. Rozhodnite, či konverguje alebo diverguje rad a svoje tvrdenie zdôvodnite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3n}{4}\right)^{2n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 2^n+1}$.

Riešenie:

(a) Vypočítame si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n} = 1.$

Keďže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, nie je splnená nutná podmienka konvergencie, a preto daný rad diverguje.

(b) Použijeme Cauchyho „odmocninové“ kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} 3n}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{64} < 1$$

Podľa Cauchyho konvergenčného kritéria daný rad konverguje.

(c) Použijeme D'Alembertovo „podielové“ kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+1}{3\cdot 2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{2^n}}{6+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Podľa D'Alembertovho konvergenčného kritéria daný rad konverguje.

17 bodov ♠

5. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Vyšetrenie priebehu funkcie zahŕňa

(a) definičný obor,

(b) nulové body,

(c) intervaly monotónnosti,

(d) lokálne extrémy,

(e) intervaly konvexnosti / konkávnosti,

(f) inflexné body,

(g) asymptoty,

(h) náčrt grafu funkcie.

Riešenie:

(a) V menovateli nesmie byť nula, a preto je definičný obor danej funkcie $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(b) Zlomok má nulovú hodnotu práve vtedy, ak je jeho čitateľ nula. Takže daná funkcia nemá nulové body.

(c) Na určenie intervalov monotónnosti potrebujeme prvú deriváciu funkcie. Danú funkciu môžeme derivovať buď ako zlomok, alebo ako zloženú funkciu $f(x) = (1-x^2)^{-1}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Nulový bod 1. derivácie (*stacionárny bod*) je jedine $x_1 = 0$, takže intervaly monotónnosti danej funkcie sú

- ▷ funkcia klesá na intervaloch: $(-\infty, -1),\ (-1, 0)$,
- ▷ funkcia rastie na intervaloch: $(0, 1),\ (1, \infty)$.

(d) Z intervalov monotónnosti vidno, že funkcia má v bode $[x_1, y_1] = [0, 1]$ lokálne minimum.

(e) Na určenie intervalov konvexnosti / konkávnosti potrebujeme určiť druhú deriváciu danej funkcie.

$$f''(x) = \frac{2\,(1-x^2)^2 + 8x^2\,(1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{2\,(1-x^2) + 8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

Vidíme, že čitateľ zlomku 2. derivácie je vždy kladný, ale menovať mení znamienka na intervaloch $(-\infty, -1),\ (-1, 1),\ (1, \infty)$. Takže intervaly konvexnosti / konkávnosti sú

- ▷ funkcia je konkávna na intervaloch: $(-\infty, -1),\ (1, \infty)$,
- ▷ funkcia konvexná na intervale: $(-1, 1)$.

(f) Inflexné body daná funkcia nemá, pretože body $\{\pm 1\}$ nepatria do jej definičného oboru.

(g) Asymptoty sú bez smernice a so smernicou. Na asymptoty bez smernice potrebujeme zistiť, či daná funkcia v bodoch $\{\pm 1\}$ „uletí“ do $\pm\infty$. Na to počítame jednostranné limity v týchto bodoch.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1-x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$$

Z uvedených limít vidíme, že daná funkcia má asymptoty bez smernice $x = -1$ a $x = 1$. Na asymptoty so smernicou musíme zistiť, ako sa graf funkcie správa, keď $x \to \pm\infty$. Z toho určíme hodnoty k a q (ak existujú) pre asypmptoty $y = kx + q$.

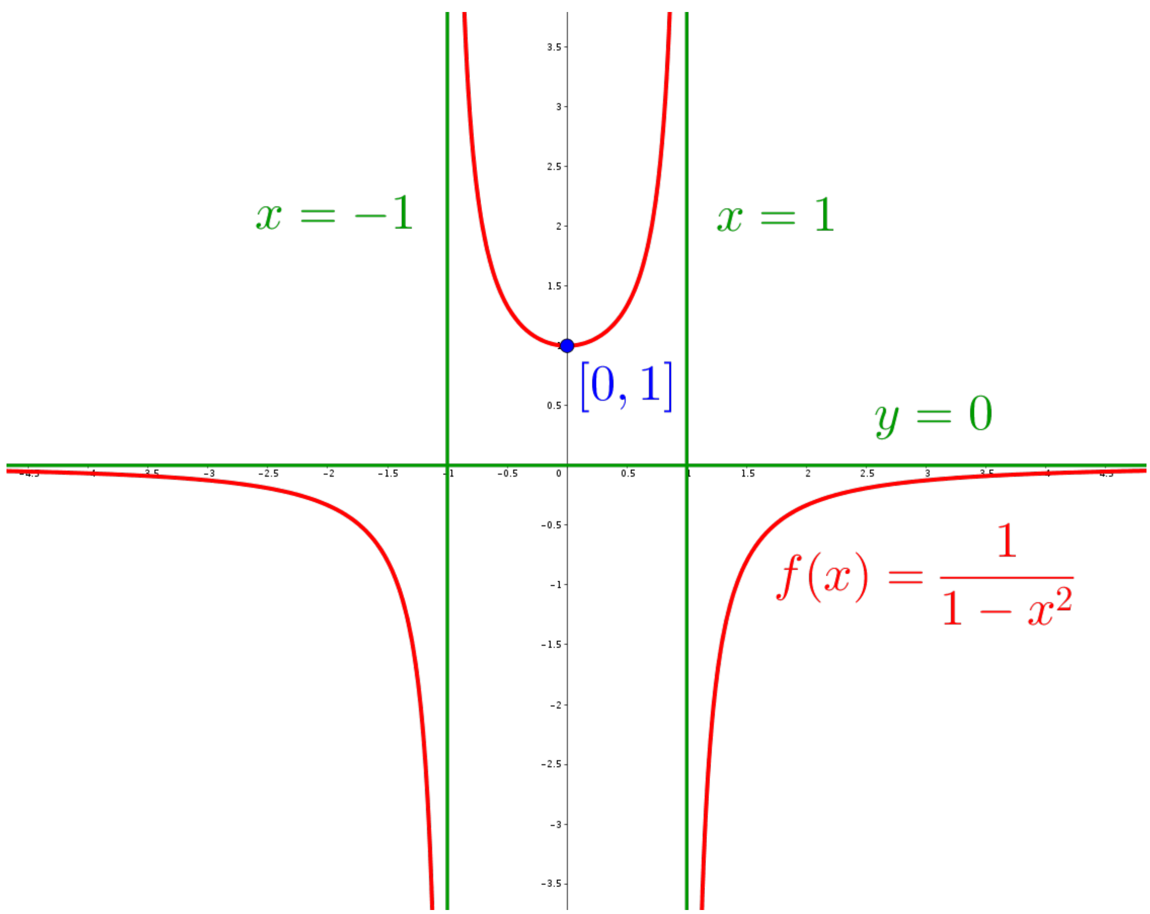
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x - x^3} = 0$$

Vo výpočte k v skutočnosti ide o dve limity $x \to -\infty$ a $x \to \infty$. V našom prípade je ale výsledok oboch týchto limít rovnaký, a preto sme to spojili do jedného zápisu. Rovnako to spravíme aj pri výpočte q.

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

Z uvedených limít vidíme, že daná funkcia má obojstrannú asymptotu so smernicou $y = 0$.

(h) Na základe faktov zistených v predošlých bodoch už vieme načrtnúť graf danej funkcie $f(x)$.



4 body ♣

6. Nech $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Potom pre každú štvorcovú maticu $\mathbb{B}$ s dvomi riadkami a dvomi stĺpcami platí $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$. Je uvedené tvrdenie pravdivé? Svoju odpoveď zdôvodnite!

Riešenie: uvedené tvrdenie **nie je pravdivé**. Stačí si ako kontrapríklad vziať maticu
$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Samozrejme existuje ešte nekonečne veľa iných matíc $\mathbb{B}$, ktoré sa dajú použiť ako kontrapríklad uvedeného tvrdenia.

3 body ♢

7. Nech $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Potom pre každé $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$\overline{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\,.$$

Je uvedené tvrdenie pravdivé? Svoju odpoveď zdôvodnite!

Riešenie: je všeobecne známe, že funkcia $\sin x$ je nepárna a funkcia $\cos x$ je párna. To znamená, že pre všetky $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi) \\ \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že ak máme komplexné číslo, ktorého goniometrický tvar je $z = a\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tak s ním združené komplexné číslo bude mať goniometrický tvar $\overline{z} = a\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.
V zadaní príkladu máme komplexné číslo, ktorého absolútna hodnota (dĺžka) je 1 ($a = 1$), t. j. jeho goniometrický tvar je $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Z uvedených faktov potom vyplýva, že

$$\overline{z} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos(-\varphi) - i\sin\varphi = \cos\varphi - i\sin\varphi\,.$$

Preto tvrdenie zo zadania príkladu **je pravdivé**.

4 body ♡

8. Nech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú dve reálne funkcie také, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = 1$. Je to možné? Ak áno, uveďte príklad, ak nie, zdôvodnite!

Riešenie: **je to možné**, pretože limita typu „$\infty - \infty$“ sa môže, v závislosti od funkcií f, g, rovnať čomukoľvek. Ak si napríklad zvolíme $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}$ a $g(x) = -x$, tak platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (-x) = -\infty$$

a zároveň

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 1\,.$$

Existuje aj nekonečne veľa iných funkcií f a g, na ktorých sa to dá ilustrovať. Napríklad $f(x) = 1+x$ a $g(x) = -x$.

4 body

9. Daná je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom pre každé $n \geq 1$ je $a_{n+1} = 3a_n$.
Môže byť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$? Svoju odpoveď zdôvodnite!

Riešenie: **Môže.** Ak položíme $a_1 = 0$, tak pre $\forall n \geq 1 : a_n = 3^{n-1}a_1 = 0$, a preto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Preto sa uvedená limita môže rovnať nule, ale jedine pre nulovú (všetky jej členy sa rovnajú nule) postupnosť.