

POSTUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

Definícia. Funkcia $f: N \rightarrow R$ sa nazýva postupnosť reálnych čísel. Ak označíme $f(n) = a_n$, tak čísla $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ určujú postupnosť. Číslo a_n sa nazýva n -tý člen postupnosti, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Množina prirodzených čísel má jediný hromadný bod ∞ , preto limitu postupnosti môžeme počítat len v ∞ .

Definícia. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel, $a \in R^*$. Ak $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0: a_n \in O_{\epsilon}(a)$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Definícia. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva konvergentná, ak existuje vlastná limita postupnosti. V ostatných prípadoch sa nazýva divergentá.

Definícia. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$), tak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť postupnosti (vybraná postupnosť z postupnosti) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Veta. Každá vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti je konvergentná.

Definícia.

1. Ak $\exists k \in R: \forall n \in N: k \leq a_n$, tak hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená.
2. Ak $\exists K \in R: \forall n \in N: a_n \leq K$, tak hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená.
3. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.

Veta. Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôkaz. Postupnosť je konvergentná, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R$, k $\epsilon = 1 \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < 1$. Ak zvolíme $k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - 1\}$, $K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + 1\}$, tak platí: $\forall n \in N: k \leq a_n \leq K$.

Veta. Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Definícia (Monotónne postupnosti).

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Ak $\forall n \in N$ platí:

- (a) $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$), tak postupnosť sa nazýva rastúca (neklesajúca).
- (b) $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$), tak postupnosť sa nazýva klesajúca (nerastúca).

Veta. Každá monotónna ohraničená postupnosť je konvergentná.

Veta (Heineho definícia limity). Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in R^*$ je hromadný bod A . Platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ práve vtedy, keď pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov z množiny $A \setminus \{a\}$ takých, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Geometrická postupnosť $\{aq^n\}_{n=0}^{\infty}$
Ak $a \neq 0$, tak geometrická postupnosť je konvergentná $\iff |q| < 1$ alebo $q = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\infty & q > 1 \\ a & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}.$$

NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY

Definícia.

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Výraz $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva nekonečný číselný rad. Číslo $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nazýva n -tý čiastočný súčet radu. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva postupnosť čiastočných súčtov radu.

Definícia. Nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva konvergentný, ak je konvergentná postupnosť čiastočných súčtov radu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ sa nazýva súčet radu. Ak je postupnosť čiastočných súčtov divergentná, tak rad sa nazýva divergentný.

$$\text{Geometrický rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \right)$$

Veta. Nech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}$. Geometrický rad je konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$. Súčet radu je $s = \frac{a}{1-q}$.

Dôkaz. Nech $q \neq \pm 1, 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q} \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\infty & q > 1 \\ \frac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q < -1 \end{cases}.$$

Ak $q = 1$, tak $s_n = na \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = (\operatorname{sgn} a)\infty$.

Ak $q = -1$, tak $s_{2n} = 0$, $s_{2n-1} = a \implies \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Vlastná limita postupnosti čiastočných súčtov radu existuje $\iff |q| < 1$
 $\implies$ nekonečný číselný rad je konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$.

Veta. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady a nech $c \in \mathbb{R}$. Potom aj rady

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ sú konvergentné a platí:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} ca_n &= c \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Veta. Nech $k \in \mathbb{N}$. Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ buď súčasne konvergujú alebo divergujú.

Ak $s = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + s$.

Veta (Nutná podmienka konverencie).

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in R$, $a_n = s_n - s_{n-1}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

RADY S NEZÁPORNÝMI ČLENMI

Ak $\forall n \in N: a_n \geq 0$, tak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesajúca, t.j. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in R_0^+ \cup \{\infty\}$.

Veta (Porovnávacie kritérium). Nech $\forall n \in N: 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí:

(a) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad.

($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa nazýva majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

(b) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný rad.

Dôkaz. (a) Nech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad a nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu. Postupnosť je neklesajúca a $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \in R \Rightarrow \forall n \in N: r_n \leq r$.

Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť je neklesajúca, $\forall n \in N: a_n \leq b_n \Rightarrow s_n \leq r_n \leq r$, t.j. zhora ohraničená $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in R \Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Poznámka. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentný, ak $\alpha > 1$, divergentný, ak $\alpha \leq 1$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sa nazýva harmonický rad.

Veta (D'Alembertovo limitné kritérium). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými

členmi, nech $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ($r \in R_0^+ \cup \{\infty\}$). Potom platí:

(a) Ak $0 \leq r < 1$, tak je rad konvergentný.

(b) Ak $r > 1$, tak je rad divergentný.

Veta (Cauchyho limitné kritérium). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi,

nech $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ ($r \in R_0^+ \cup \{\infty\}$). Potom platí:

(a) Ak $0 \leq r < 1$, tak je rad konvergentný.

(b) Ak $r > 1$, tak je rad divergentný.

ABSOLÚTNA A RELATÍVNA KONVERGENCIA

Definícia. Nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *absolútne konvergentný*, ak

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentný rad.

Veta. Každý absolútne konvergentný rad je konvergentný.

Veta (Leibnizovo kritérium pre rady so striedavými znamienkami).

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Po-

tom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ je konvergentný rad.

Definícia. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je divergentný, tak hovoríme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *relatívne konvergentný* rad.

MOCNINOVÉ RADY

Definícia. Nech $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in R$. Výraz

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

sa nazýva *mocninový rad*. Číslo a sa nazýva *stred radu*, čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *koeficienty radu*.

Obor konvergenzie mocninového radu O_K : množina všetkých $x \in R$, pre ktoré daný rad konverguje.

Poznámka. Každý mocninový rad konverguje vo svojom strede, $a \in O_K$.

Veta.

1. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje v bode $x_1 \neq a$, tak konverguje $\forall x \in R: |x-a| < |x_1-a|$.

2. Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ diverguje v bode x_2 , tak diverguje $\forall x \in R: |x_2-a| < |x-a|$.

Veta. Pre mocninový rad nastáva práve jeden z nasledujúcich prípadov:

1. rad konverguje len pre $x = a$ ($O_K = \{a\}$).
2. rad konverguje pre $\forall x \in R$ ($O_K = R$).
3. $\exists \varrho \in (0, \infty)$ také, že na intervale $(a-\varrho, a+\varrho)$ rad konverguje, na $R \setminus \langle a-\varrho, a+\varrho \rangle$ diverguje ($(a-\varrho, a+\varrho) \subset O_K \subset \langle a-\varrho, a+\varrho \rangle$).

ϱ – polomer konvergenzie radu

$I_K = (a-\varrho, a+\varrho)$ – interval konvergenzie radu

Veta. Nech ϱ je polomer konvergenzie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a nech funkcia

$s: (a-\varrho, a+\varrho) \rightarrow R$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je súčet radu. Potom s je spojitá funkcia, má derivácie všetkých rádov a platí:

$$\forall x \in (a-\varrho, a+\varrho): \quad s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}, \quad k \in N.$$