Postupnosti reálnych čísel

Definícia. *Funkcia* $f\colon N \to R$ *sa nazýva postupnosť reálnych čísel. Ak označíme* $f(n) = a_n$*, tak čísla* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *určujú postupnosť. Číslo* a_n *sa nazýva n-tý člen postupnosti, označenie* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Množina prirodzených čísel má jediný hromadný bod ∞, preto limitu postupnosti môžeme počítať len v ∞.

Definícia. *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel,* $a \in R^*$. *Ak*
$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\colon a_n \in O_\epsilon(a)$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Definícia. *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva konvergentná, ak existuje vlasná limita postupnosti. V ostatných prípadoch sa nazýva divergentá.*

Definícia. *Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel a* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je rastúca postupnosť prirodzených čísel* $(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$, *tak* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *sa nazýva podpostupnosť postupnosti (vybraná postupnosť z postupnosti)* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Veta. *Každá vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti je konvergentná.*

Definícia.
1. Ak $\exists k \in R\colon \forall n \in N\colon k \leq a_n$, *tak hovoríme, že postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je zdola ohraničená.*
2. Ak $\exists K \in R\colon \forall n \in N\colon a_n \leq K$, *tak hovoríme, že postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je zhora ohraničená.*
3. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.*

Veta. *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.*

Dôkaz. Postupnosť je konvergentná, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$, k $\varepsilon = 1\ \exists n_0 \in N\colon \forall n \geq n_0\colon |a_n - a| < 1$. Ak zvolíme $k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a-1\}$, $K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a+1\}$, tak platí: $\forall n \in N\colon k \leq a_n \leq K$.

Veta. *Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.*

Definícia (Monotónne postupnosti).
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Ak* $\forall n \in N$ *platí:*
(a) $a_n < a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$, *tak postupnosť sa nazýva rastúca (neklesajúca).*
(b) $a_n > a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$, *tak postupnosť sa nazýva klesajúca (nerastúca).*

Veta. *Každá monotónna ohraničená postupnosť je konvergentná.*

<u>Geometrická postupnosť $\{aq^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$</u>

Ak $a \neq 0$, tak geometrická postupnosť je konvergentná $\iff$ $|q| < 1$ alebo $q = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} aq^n = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\infty & q > 1 \\ a & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}.$$

Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti (konečný číselný rad):

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \begin{cases} n\,a & q = 1 \\ a\dfrac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1. \end{cases}$$