æ

Polynómy a racionálne funkcie

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ ($\in C$). Zobrazenie f, ktoré každému $x \in R$ ($x \in C$) priradí číslo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

sa nazýva *polynóm nad R (nad C) s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.*

Ak je $a_n \neq 0$, tak sa nazýva *stupeň* polynómu f (označenie $\mathrm{st}\, f$, ak je f nulový polynóm, tak jeho stupeň je $-\infty$.

Číslo $c \in C$, pre ktoré hodnota polynómu $f(c) = 0$ sa nazýva *koreň* polynómu f

Veta. *Nech f, g sú polynómy nad R (C). Potom*

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}\, f + \mathrm{st}\, g\,.$$

Veta (Základná veta algebry)**.** *Každý nekonštantný polynóm nad C má koreň v C.*

Veta (o jednoznačnosti koeficientov)**.** *Nech f, g sú polynómy nad R (C),*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,\ a_n \neq 0\,, \quad g(x) = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0\,,\ b_m \neq 0\,.$$

Potom $m = n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_n = b_n$.

Veta (o delení $f(x) : (x - c)$)**.** *Nech f je polynóm nad C a nech $c \in C$. Potom sa zvyšok podelení $f(x) : (x - c)$ rovná hodnote $f(c)$.*

Dôsledok. *Ak $c \in C$ je koreňom polynómu $f(x)$, tak sa dá deliť $f(x) : (x - c)$ bezo zvyšku, teda $(x - c)$ je deliteľom polynómu $f(x)$ (označujeme to $(x - c) \mid f(x)$).*

Hornerova schéma. Delenie $f(x) : (x - c)$ sa dá zapisovať pomocou tabuľky, ktorá sa nazýva Hornerova schéma:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\dots$	cb_1	cb_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$r = f(c)$

V treťom riadku tabuľky sú súčty čísel v príslušnom stĺpci v 1. a 2. riadku,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - c)\big(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0\big) + r\,.$$

Definícia. Polynóm f nad R (nad C) sa nazýva *ireducibilný*, ak sa nedá napísať ako súčin dvoch polynómov stupňa aspoň jeden.

Veta. *Ak je číslo c koreňom f polynómu s reálnymi koeficientami, tak je aj komplexne združené číslo $\bar{c}$ koreňom polynómu f.*

Zo základnej vety algebry a predchádzajúcej vety vyplýva, že ireducibilnými polynómami sú iba polynómy

1. nad C najviac 1. stupňa ($f(x) = ax + b$, $a, b \in C$),
2. nad R
   a. najviac 1. stupňa ($f(x) = ax + b$, $a, b \in R$)
   b. polynómy druhého stupňa: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$; $D = b^2 - 4ac < 0$.

Definícia. Číslo $c \in C$ je koreň *násobnosti* $k \in N$ polynómu f, ak existuje polynóm g, taký že pre $\forall x$ platí $f(x) = (x - c)^k g(x)$ a hodnota $g(c) \neq 0$.

Kanonický rozklad. Každý polynóm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ sa dá rozložiť na súčin mocnín ireducibilných polynómov

a) nad C: $\quad f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}\,,\ c_1, c_2 \dots c_m \in C$ sú korene polynómu $k_1, k_2, \dots, k_m$ sú ich násobnosti a $k_1 + k_2 + \dots k_m = n\,.$

b) nad R:

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_p)^{k_p}\,(x^2 - p_1 x + q_1)^{\ell_1} \dots (x^2 - p_r x + q_r)^{\ell_r}\,,$$

$$c_1, c_2, \dots, c_p;\ p_1, p_2, \dots, p_r;\ q_1, q_2, \dots, q_r \in R\,;$$

$$p_i^2 - 4q_i < 0\ \forall\, i = 1, \dots, r\,, \quad (k_1 + \dots k_p) + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_r) = n$$

Veta o racionálnych koreňoch. *Nech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z$. Ak je racionálne číslo v základnom tvare $p = \frac{p}{q}$ (t.j. $p \in Z$, $q \in N$ a zlomok sa nedá krátiť) je koreňom polynómu (s celočíselnými koeficientami) f, tak menovateľ q je deliteľom čísla a_n a čitateľ p je deliteľom čísla a_0 (stručne $p|a_0$, $q|a_n$).*

Racionálne funkcie

Definícia. Nech f, g sú polynómy nad R (nad C), $g \neq 0$. Potom funkciu $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nazývame **racionálna funkcia** nad R (nad C). Ak $\operatorname{st} f < \operatorname{st} g$, tak sa funkcia $r(x)$ nazýva **rýdzoracionálna**.

Definícia. Elementárnym zlomkom nad C sa nazýva racionálna funkcia tvaru

$r(x) = \dfrac{a}{(x-c)^k}$; $a, c \in C$, $k \in N$.

Elementárnym zlomkom nad R sa nazýva racionálna funkcia jedného z tvarov

a) $r(x) = \dfrac{a}{(x-c)^k}$; $a, c \in R$, $k \in N$.

b) $r(x) = \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$; $a, b, p, q \in R$, $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$.

Veta. *Každá racionálna funkcia nad R (nad C) sa dá napísať jediným spôsobom ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R (nad C).*

Existencia rozkladu nad C je dôsledok nasledujúceho tvrdenia, podobne sa dokáže aj existencia rozkladu nad R. Jednoznačnosť je dôsledkom vety o jednoznačnosti koeficientov polynómov.

Pomocná veta. *Nech f, g sú polynómy nad C, $\operatorname{st} f < n + \operatorname{st} g$, $c \in C$, $g(c) \neq 0$. Potom $\exists a \in C$ a polynóm $h(x)$ také, že*

$$\frac{f(x)}{(x-c)^n g(x)} = \frac{a}{(x-c)^n} + \frac{h(x)}{(x-c)^{n-1} g(x)}\,. \tag{1}$$

Dôkaz. Pre $a \in C$ platí: $\dfrac{f(x)}{(x-c)^n g(x)} =$

$$= \frac{ag(x) + f(x) - ag(x)}{(x-c)^n g(x)} = \frac{ag(x)}{(x-c)^n g(x)} + \frac{f(x) - ag(x)}{(x-c)^n g(x)} \tag{2}$$

Pre $a = \dfrac{f(c)}{g(c)}$ a pre $f_1(x) = f(x) - ag(x)$ platí $f_1(c) = 0 \Rightarrow$ existuje polynóm $h(x)$ taký, že $f(x) - ag(x) = (x-c)h(x)$. Dosadením do vzťahu (2) a vykrátením dostaneme (1).

Príklad. Funkciu $r(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ rozložte na elementárne zlomky.

1. $r(x)$ nie je rýdzoracionálna, preto najprv delíme:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 2x - 1 \\
\underline{-(2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x)} \\
\quad\quad - x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \\
\quad\quad \underline{-(-x^3 + 2x^2 + x - 2)} \\
\quad\quad\quad\quad 2x^2 - 7x + 3 \text{ zvyšok}
\end{array}$$

$r(x) = 2x - 1 + \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ a treba ešte rozložiť rýdzorac. funkciu $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$.

2. Menovateľa rozložíme: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$ a hľadáme čísla A, B, C tak, aby platilo pre $\forall x \in R$

$$\frac{2x^2-7x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$
$$2x^2-7x+3 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$$

Dosadením
$x=1$: $2-7+3 = A(1+1)(1-2) \Rightarrow -2 = -2A \Rightarrow \boxed{A=1}$;
$x=-1$: $2+7+3 = B(-1-1)(-1-2) \Rightarrow 12 = 6B \Rightarrow \boxed{B=2}$;
$x=2$: $8-14+3 = -3 = 3C \implies \boxed{C=-1}$.n
Výsledok:

$$f(x) = 2x-1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}\,.$$

Poznámka. V rozklade rýdzoracionálnej funkcie $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ na súčet elementárnych zlomkov môžu byť len zlomky, ktorých menovatele sú deliteľom menovateľa $g(x)$. Ak je st $g(x)=k$, tak musíme hľadať k neurčitých koeficientov. Napríklad pre $k=6$, st $f<6$:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)}$$
$$\frac{f(x)}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+2}$$

nad C

$$\frac{f(x)}{(x-i)^2(x+i)^2(x-1)(x+5)} = \frac{A}{(x-i)^2} + \frac{B}{(x-i)} + \frac{C}{(x+i)^2} + \frac{D}{(x+i)} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x+5}$$

Príklady.

1. Rozhodnite, či je daná funkcia elementárny zlomok nad R.

a) $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ b) $\dfrac{x}{(x+2)}$ c) $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

d) $\dfrac{x}{x^2+2x+2}$ e) $\dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$ f) $\left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right)^3$

2. Nájdite rozklad danej funkcie na elementárne zlomky nad R aj nad C.

a) $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$ $\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{i}{x+i}-\frac{i}{x-i}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]$

b) $\dfrac{-x^2-2x+1}{x^3+6x^2+12x+8}$ $\left[\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{x+2}\right]$

c) $\dfrac{1}{2x^2+5x-12}$ $\left[\frac{2}{11}\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{11}\frac{1}{x+4}\right]$

d) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$ $\left[\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}\right]$

e) $\dfrac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2}$ $\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right]$

f) $\dfrac{4x^2+3x+3}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ $\left[\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-i}{x-i}+\frac{1+i}{x+i}+\frac{-1-i}{x+1-i}+\frac{-1+i}{x+1+i}\right)\right]$