Neurčitý integrál

Primitívna funkcia.

Definícia. *Nech I je interval, $f\colon I \to R$. Ak $\forall x \in I\colon F'(x) = f(x)$, tak funkcia $F\colon I \to R$ sa nazýva primitívnou funkciou k funkcii f.*

Veta. *Nech I je interval a nech $F\colon I \to R$ je primitívnou funkciou k funkcii f. $G\colon I \to R$ je primitívnou funkciou k funkcii f práve vtedy, keď $\exists c \in R \quad \forall x \in I\colon$ $G(x) = F(x) + c$.*

Definícia (Neurčitý integrál). *Nech I je interval, $f\colon I \to R$. Množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f sa nazýva neurčitý integrál funkcie f, označujeme $\int f(x)\, dx$.*

Poznámka. V zápise neurčitého integrálu množinové zátvorky vynechávame, t.j. zapisujeme $\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) + c,\ c \in R$.

Poznámka. Z definície primitívnej funkcie a neurčitého inegrálu vyplýva $\int f'(x)\,\mathrm{dx} = f(x) + c,\ c \in R$.

Veta (Existencia primitívnej funkcie). *Nech $f\colon I \to R$ je spojitá funkcia. Potom existuje primitívna funkcia $F\colon I \to R$ k funkcii f.*

Elementárne integrály

$\displaystyle\int 0\,\mathrm{dx} = c$	$c \in R,\ x \in R$
$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \in N,\ x \in R$
$\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{dx} = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + c$	$\alpha \in R \setminus \{0\},\ x \in (0,\infty)$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty,0) \vee x \in (0,\infty)$
$\displaystyle\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x + c$	$x \in R$
$\displaystyle\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$a \in R^+ \setminus \{1\},\ x \in R$
$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x + c$	$x \in R$
$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{dx} = -\cos x + c$	$x \in R$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{dx} = \operatorname{tg} x + c$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{dx} = \operatorname{cotg} x + c$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in Z$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x$	$x \in R$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \arcsin x + c = -\arccos x$	$x \in (-1,1)$
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$x \in I \subseteq \{x \in D(f) \mid : f(x) \neq 0\}$

Veta (Linearita integrálu). *Nech $F, G\colon I \to R$ sú primitívne funkcie k funkciám $f, g\colon I \to R$ a nech $\alpha \in R$. Potom $F + G\colon I \to R$ je primitívna funkcia k funkcii $f + g$, $\alpha F\colon I \to R$ je primitívna funkcia k funkcii αf a platí:*
(a) $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$,
(b) $\int \alpha f(x)\ dx = \alpha \int f(x)\ dx$.

Metóda per partes.

Veta. *Nech I je interval a f, g sú spojite diferencovateľné funkcie na I. Potom platí:*

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx,\ \ x \in I.$$

Substitučná metóda.

Veta (I.). *Nech I, J sú intervaly, nech $\varphi\colon I \to J$ je spojite diferencovateľná funkcia, nech $f\colon J \to R$ je spojitá funkcia a $F\colon J \to R$ je primitívna funkcia k funkcii f. Potom platí:*

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\ dx = F(\varphi(x)) + c,\ \ x \in I.$$

Veta (II.). *Nech I, J sú intervaly, nech $\varphi\colon I \to J$ je spojite diferencovateľná bijekcia a $f\colon J \to R$ je spojitá funkcia. Nech $G\colon I \to R$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'\colon I \to R$. Potom platí:*

$$\int f(x)\ dx = \int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\ dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c,\ \ x \in J.$$

Poznámka.
Použitie 1. vety o substitúcii ($x \in I$):

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ \mathrm{du} = \varphi'(x)\,\mathrm{dx} \end{array}\right| = \int f(u)\,\mathrm{du} = F(u) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Použitie 2. vety o substitúcii ($x \in J$):

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{c} \varphi^{-1}(x) = t \\ x = \varphi(t) \\ \mathrm{dx} = \varphi'(t)\,\mathrm{dt} \end{array}\right| = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = G(t) + c = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Lineárna substitúcia ($a \in R \setminus \{0\},\ b \in R$).

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{c} ax + b = u \\ a\,\mathrm{dx} = \mathrm{du} \end{array}\right| = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Goniometrické substitúcie.

$$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x\,\mathrm{dx} = \mathrm{du} \end{array}\right| = F(\sin x) + c$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{dx} = \left|\begin{array}{c} \cos x = u \\ -\sin x\,\mathrm{dx} = \mathrm{du} \end{array}\right| = -F(\cos x) + c$$

Integrovanie racionálnych funkcií.

Definícia(Elementárne zlomky). *Nech* $A, B, C, c, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$ *Racionálne funkcie*

$$R_1(x) = \frac{A}{(x-c)^n}, \qquad R_2(x) = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

sa nazývajú elementárnymi zlomkami nad R.

Veta. *Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne zapísať (až na poradie sčítancov) ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad* R.

Integrovanie elementárnych zlomkov typu R_1

$$n \neq 1 \qquad \int \frac{1}{(x-c)^n}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}} + c$$

$$n = 1 \qquad \int \frac{1}{x-c}\,\mathrm{dx} = \ln|x-c| + c$$

Integrovanie elementárnych zlomkov typu R_2, ak $n = 1$

$$p^2 - 4q < 0 \implies x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}, \text{ nech } a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$$

$$\int \frac{bx + c}{x^2 + px + q}\,\mathrm{dx} = \frac{b}{2}\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q}\,\mathrm{dx} + c\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,\mathrm{dx} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q}\,\mathrm{dx} = \ln\left(x^2 + px + q\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + px + q}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + a^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{a}\right) + c.$$

Poznámka.
Ak $p^2 - 4q > 0$, tak kvadratický polynóm má dva rôzne reálne korene

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2), \qquad \frac{bx + c}{x^2 + px + q} = \frac{B}{x - x_1} + \frac{C}{x - x_2}.$$

Ak $p^2 - 4q = 0$, tak kvadratický polynóm má jeden dvojnásobný koreň

$$x^2 + px + q = (x - x_1)^2, \qquad \frac{bx + c}{x^2 + px + q} = \frac{B}{x - x_1} + \frac{C}{(x - x_1)^2},\ b \neq 0.$$