Sústavy lineárnych rovníc

Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

a_{ij} ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$) sú dané čísla (koeficienty), pravé strany $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sú tiež dané známe čísla.

Definícia. Usporiadaná n-tica čísel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sa nazýva riešením sústavy (S), ak pre ňu platia rovnosti vo všetkých rovniciach danej sústavy.

Riešiť sústavu lineárnych rovníc znamená nájsť množinu všetkých riešení. Budeme ju označovať $\mathcal{R}$.

Príklad. Pre „sústavu" jednej rovnice s jednou neznámou $ax = b$, $a, b \in R$ môžu nastať tri prípady
1. $a \neq 0 \implies \mathcal{R} = \left\{ \dfrac{b}{a} \right\}$ — **práve jedno** riešenie.
2. $a = 0 = b \implies \mathcal{R} = R$ — **nekonečne veľa** riešení.
3. $a = 0$, $b \neq 0 \implies \mathcal{R} = \emptyset$ — **žiadne** riešenie.

matice

R^n (C^n) bude označovať množinu všetkých usporiadaných n-tíc reálnych (komplexných) čísel. Zavedieme v nich algebraické operácie:

Definícia. Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ $(\in C^n)$, nech $\alpha \in R$ $(\in C)$. Potom
- (i) $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ sa nazýva súčet usporiadaných n-tíc $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.
- (ii) $\alpha \odot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ sa nazýva násobok n-tice $\mathbf{x}$ číslom α.
- (iii) Usporiadaná n-tica $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ sa nazýva nulová.
- (iv) Usporiadaná n-tica $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ sa nazýva n-tica opačná k n-tici $\mathbf{x}$.

Definícia. Obdĺžniková tabuľka reálnych (komplexných) čísel a_{ij}, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

sa nazýva matica typu $m \times n$ nad reálnymi (komplexnými) číslami. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ označujeme $R^{m \times n}$ $(C^{m \times n})$.

označenie:
A_{i*} alebo R_i — i-ty riadok, A_{*j} alebo S_j — j-ty stĺpec matice A.
Ak $A \in R^{m \times n}$, tak $A_{i*} \in R^{1 \times n}$, $A_{*j} \in R^{m \times 1}$.

Definícia. Matica $A = (a_{ij}) \in C^{m \times n}$ sa nazýva matica sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

Matica

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

sa nazýva rozšírená matica sústavy (S).

Na popísanie Gausovej eliminačnej metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc (úpravy matice A) zavedieme nasledujúce pojmy:

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$. Vedúcim prvkom (pivotom) nenulového riadku matice A sa nazýva prvý (zľava) nenulový prvok v tomto riadku. Ak je A_{i*} nulový riadok, tak nemá ved. prvok.

Matica A sa nazýva stupňovitá, ak pre každé $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ platí

1. $A_{i*} = 0 \implies A_{i+1,*} = 0$ (nulové riadky sú pod všetkými nenulovými).
2. Ak a_{ip} a $a_{i+1,q}$ sú pivoty i-teho a $(i+1)$-ho riadku matice A, tak $q > p$ (t.j. pivot v nižšom riadku je viac vpravo).

Definícia. Dve sústavy lineárnych rovníc (S1) a (S2) sa nazývajú **ekvivalentné**, ak je každé riešenie sústavy (S1) tiež riešením sústavy (S2) a naopak, každé riešenie sústavy (S2) je riešením sústavy (S1).

Hovoríme, že matice $A \in R^{m\times(n+1)}$ a $B \in R^{k\times(n+1)}$ sú **ekvivalentné** (píšeme $A \sim B$, ak sú rozšírenými maticami ekvivalentných sústav lineárnych rovníc.

Príklad. Matica $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ nie je stupňovitá, matica $B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ je stupňovitá (B vznikla z matice A zmenou poradia riadkov: $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_3 \leftrightarrow R_4$. Je zrejmé, že $A \sim B$. Množinu $\mathcal{R}$ všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je B nájdeme „spätným dosadzovaním":

B_{3*} zodpovedá rovnici: $2x_4 = 0$, teda $\underline{x_4 = 0}$,
v B_{*3} nie je pivot, zvolíme si $\underline{x_3 = a}$,
B_{2*} zodpovedá rovnici: $-x_2 + x_3 + 2x_4 = -3$
Dosadíme za x_3, x_4: $-x_2 + a = -3 \implies$ $\underline{x_2 = a + 3}$,
B_{1*}: $x_1 + x_2 + x_4 = 0 \implies x_1 = -x_2 - x_4 \implies$ $\underline{x_1 = -a - 3}$.

$$\boxed{\mathcal{R} = \{(-a-3, a+3, a, 0) \colon a \in R\}}$$

Gaussova eliminačná metóda je algoritmus, ktorý zmení danú maticu A ma stupňovitú maticu B tak, aby $A \sim B$ a následne „spätným dosadzovaním" vypočíta množinu všetkých riešení zodpovedajúcej sústavy.

Najprv si uvedomíme, že nasledujúce operácie na matici nemenia množinu $\mathcal{R}$ všetkých riešení zodpovedajúcej sústavy.

Definícia. Elementárnou riadkovou operáciou (ERO) na matici A sa nazýva

1. $A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$, $i \neq j$ (vzájomná výmena dvoch riadkov).
2. $A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\alpha \neq 0$ (násobenie niektorého riadku nenulovým číslom).
3. $A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$, $i \neq j$ (pričítanie násobku iného riadku k danému riadku).

Veta. *Ak matica B vznikne z matice A pomocou ERO, tak $A \sim B$.*

Veta. *Každá matica $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$ sa dá upraviť na stupňovitú pomocou konečného počtu ERO.*

Dôkaz. Veta sa dokazuje matematickou indukciou:

1. Ak $m = 1$, tak je matica A stupňovitá (má iba jeden riadok).
2. Ak $n = 1$ (matica A má len jeden stĺpec):
   - 2a. Ak je A nulový stĺpec, tak je matica stupňovitá
   - 2b. Ak je A nenulový stĺpec, tak môžeme predpokladať, že $a_{11} \neq 0$ (ak by $a_{11} = 0$, tak niektoré iné $a_{i1} \neq 0$ a vykonáme ERO $A_{i*} \leftrightarrow A_{1*}$), potom pomocou ERO
     $A_{i*} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} A_{1*}$, $i = 2, 3, \dots, m$, sa matica A transformuje na stupňnovitú:
     $$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = A \sim B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. Ak $A \in C^{m\times n}$ a $m > 1$ alebo $n > 1$, tak predpokladáme, že veta platí pre každú maticu, ktorá má menej riadkov alebo menej stĺpcov ako matica A. Stačí z tohoto predpokladu odvodiť, že aj A sa dá upraviť pomocou ERO na stupňovitú.
   - 3a. Ak je prvý stĺpec matice A nulový, tak ostane nulový po transformácii pomocou akejkoľvek ERO. Matica A_1, ktorá z matice A vznikne vynechaním prvého stĺpca sa podľa predpokladu dá upraviť na stupňovitú pomocou konečného počtu ERO. Keď tie isté ERO urobíme na celej matici A, tak dostaneme stupňovitú maticu $B \sim A$.
   - 3b. Ak je prvý stĺpec matice A nenulový, tak (ppodobne ako v prípade 2b) sa pomocou ERO dá upraviť na maticu tvaru:
     $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad b_{11} \neq 0\,.$$

Matica B_1, ktorá vznikna z matice B vynechaním prvého riadku sa podľa predpokladu dá upraviť pomocou konečného počtu ERO na stupňovitú maticu $D_1 \in C^{(m-1)} \times n$, ktorej prvý stĺpec je nulový, spolu s prvým riadkom matice B dostaneme stupňovitú maticu $\begin{pmatrix} B_{1*} \\ D_1 \end{pmatrix} = D \sim B \sim A$.

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ je stupňovitá. Matica A sa nazýva redukovaná stupňovitá, ak
1. Všetky pivoty jej riadkov sa rovnajú 1.
2. V stĺpci matice A, v ktorom sa nachádza pivot niektorého riadku sú všetky ostatné prvky nulové.

Veta. *Každá matica $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$ ($A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$) sa dá pomocou konečného počtu ERO upraviť na jednoznačne určenú redukovanú stupňovitú maticu $B \in C^{m\times n}$ ($B \in R^{m\times n}$).*

Veta. *Nech $A \in R^{m\times(n+1)}$ je (redukovaná) stupňovitá matica, ktorá je rozšírenou maticou sústavy lineárnych rovníc* (S). *Ak má A k nenulových riadkov, tak*
1) *Ak je $A_{k*} = (0\ 0\ \dots\ 0 \mid 1)$, tak súustava* (S) *nemá riešenie.*
2) *Ak $k = n$ a $A_{k*} = (0\ 0\ \dots\ 1 \mid c)$, $c \in C$, tak* (S) *má práve jedno riešenie*
3) *Ak $k < n$ a $A_{k*} \neq (0\ 0\ \dots\ 0 \mid 1)$, tak má sústava* (S) *nekonečne veľa riešení a na určenie množiny $\mathcal{R}$ všetkých riešení treba $n-k$ parametrov.*

Poznámka. Ak sú pravé strany všetkých rovníc sústavy (S) nulové, tak má aspoň jedno riešenie. Také sústavy sa nazývajú homogénne. Pri ich riešení upravujeme maticu sústavy (nie rozšírenú). Predchádzjúca veta je v tomto prípade:

Veta. *Nech $A \in R^{m\times n}$ je (redukovaná) stupňovitá matica, ktorá je maticou homogénnej sústavy lineárnych rovníc* (S). *Ak má A k nenulových riadkov, tak*
1) *Ak $k = n$, tak* (S) *má práve jedno riešenie $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)$.*
2) *Ak $k < n$, tak má sústava* (S) *nekonečne veľa riešení a na určenie množiny $\mathcal{R}$ všetkých riešení treba $n-k$ parametrov.*

Príklad. 1. Rozhodnite, či je daná matica (redukovaná) stupňovitá. Ak áno napíšte množinu všetkých riešení príslušnej sústavy.

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$

2. Riešte sústavu

$$\begin{aligned} x_1 + (1+i)x_2 - \quad 2ix_3 \quad &= 7 \\ ix_1 - \quad 3x_2 \quad + (1-i)x_3 &= 2i \end{aligned}$$

3. Riešte sústavu s parametrom $\lambda \in C$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 \ + x_3 \ &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 \ &= 1 \\ x_1 + x_2 \ + \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Maticové operácie

Ak $A = (a_{ij} \in C^{m\times n}$ a $B = (b_{ij} \in C^{m\times n}$ sú matice rovnakého typu a $\alpha \in C$, tak definujeme (podobne ako pre usporiadané n-tice) súčet matíc a skalárny násobok matice:

Definícia. Nech $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in C^{m\times n}$, $\alpha \in C$. Potom

$$A + B = \big(a_{ij} + b_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}, \qquad \alpha A = \big(\alpha a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}},$$

Súčet dvoch matíc nerovnakého typu nie je definovaný.

Ak A je matica sústavy (S) a $\mathbf{b}$ je stĺpec jej pravých strán, tak sa sústava stručne zapisuje v tvare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (A krát $\mathbf{x}$ rovná sa $\mathbf{b}$), presnejšie:

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in C^{n\times 1}$, tak sa stĺpec

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$= x_1A_{*1} + x_2A_{*2} + \dots + x_nA_{*n}$ nazýva súčin matice A so stĺpcom $\mathbf{x}$.

Definícia súčinu matíc. Ak $A = (a_{ij}) \in C^{m\times k}$, $B = (b_{ij}) \in C^{k\times n}$, tak definujeme $A \cdot B = C = (c_{ij}) \in C^{m\times n}$, pričom

$$c_{ij} = A_{i*} \cdot B_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}$$

Ak sa počet riadkov matice B nerovná počtu stĺpcov matice A, tak súčin $A \cdot B$ nie je definovaný.

Príklad. Nájdite $A, B \in R^{2\times 2}$, pre ktoré $AB \neq BA$ (násobenie matíc nie je komutatívne).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Teda jednou z možností je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Veta. *Nech $A \in C^{m\times k}$, $B \in C^{k\times \ell}$, $D \in C^{\ell\times n}$.*
Potom platí $(AB)D = A(BD)$ (asociatívny zákon)

Veta. *Nech $A, B \in C^{m\times k}$, $D \in C^{k\times n}$, $E \in C^{\ell\times m}$. Potom platia diostributívne zákony:*
(i) $(A + B)D = AD + BD$ (ii) $E(A + B) = EA + EB$

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$, pre ktorú platí: $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ sa nazýva jednotková. Označuje sa I_n.

$$P \in C^{m\times n} \implies PI_n = P\,, \qquad Q \in C^{n\times k} \implies I_nQ = Q\,.$$

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva **regulárna** (invertibilná), ak $\exists\, B \in C^{n\times n}$, pre ktoré $AB = BA = I_n$. Matica B sa potom nazýva matica inverzná k matici A (označenie: $B = A^{-1}$). Matica, ktorá nie je regulárna sa nazýva **singulárna**.

Pritom platí $AB = I_n \implies BA = I_n$ a inverzná matica existuje najviac jedna.

Príklad. $A = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Nájdite A^{-1}, ak existuje.

Hľadáme $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tak, aby $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, t.j. riešime tri sústavy:

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ich rozšírené matice sú:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 29 & -11 & 1 \\ -5 & 18 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 29 & -11 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 29 & -11 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Riešime naraz všetky tri:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 29 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right), \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tento postup platí všeobecne: $A \in C^{n\times n}$ rozšírime o I_n. Ak $(A \mid I_n) \sim (I_n \mid B)$, tak $B = A^{-1}$. Ak redukovaná stupňovitá matica ekvivalentná s A nie je I_n, tak $\nexists A^{-1}$.

Príklad. 1. Riešte maticové rovnice

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Vypočítajte A^{-1}, ak $A =$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Determinanty štvorcových matíc

Definícia. Nech $n \in N$, $A \in C^{n\times n}$ a nech matica A_{ij} vznikne z matice A vynechaním riadku A_{i*} a stĺpca A_{*j}.

Determinantom matice A nazývame číslo $\det A$ definované nasledovne:

1) ak $n = 1$, $A = (a_{11})$, tak $\det A = a_{11}$,
2) ak $n > 1$, tak

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det A_{1n}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} \text{ (rozvoj podľa 1. riadku).}\end{aligned}$$

Podľa definície pre:

$n = 2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix},\ A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \text{ (Sarusovo pravidlo)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\\ & & & + & + \quad + \end{array}$$

vedľa matice ešte raz napíšeme prvé dva stĺpce, $\det A$ je súčet súčinov prvkov na diagonálach $\searrow$ mínus súčet súčinov prvkov na diagonálach $\nearrow$

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$. Číslo $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok prvku a_{ij} v matici A.

Príklad. Vypočítajte algebraické doplnky prvkov matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2,\ \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -3,\ \ldots$$

Veta o výpočte determinantu. *Nech $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $n > 1$. Potom platí:*

(1) *Ak B vznikla z matice A pomocou ERO*

a) $A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$, $i \neq j$, *tak* $\det B = -\det A$,

b) $A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\alpha \in C$, *tak* $\det B = \alpha\det A$,

c) $A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$ $i \neq j$, *tak* $\det B = \det A$.

(2) *Pre* $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

a) $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$ *(rozvoj podľa riadku A_{i*}),*

b) $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{ki}$ *(rozvoj podľa stĺpca A_{*i})*

(3) *Nech $A, A', A'' \in C^{n\times n}$ a nech $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Ak $A_{i*} = A'_{i*} + A''_{i*}$ a pre $\forall k \neq i$ platí $A_{k*} = A'_{k*} = A''_{k*}$, tak $\det A = \det A' + \det A''$.

Definícia. Matica $A \in C^{m\times n}$ sa nazýva

a) dolná trojuholníková, ak $j > i \implies a_{ij} = 0$,

b) horná trojuholníková ak $j < i \implies a_{ij} = 0$,

c) trojuholníková, ak je dolná alebo horná trojuholníková,

d) diagonálna, ak je dolná aj horná trojuholníková.

Matica $A^\top = B = (b_{ij}) \in C^{n\times m}$ sa nazýva matica transponovaná k matici A, ak platí

$b_{ij} = a_{ji}$ pre $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dôsledky vety o výpočte determinantu:

1. Ak pre $i \neq j$ $A_{*i} = A_{*j}$, tak $\det A = 0$.
2. Ak je A trojuholníková, tak $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.
3. $\det A^\top = \det A$.

Pre maticu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ označme $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$. $\operatorname{adj} A$ sa nazýva matica adjungovaná k matici A.

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} & a_{11}\tilde{a}_{21} + a_{12}\tilde{a}_{22} + a_{13}\tilde{a}_{23} & a_{11}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{33} \\ a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13} & a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{23}\tilde{a}_{23} & a_{21}\tilde{a}_{31} + a_{22}\tilde{a}_{32} + a_{23}\tilde{a}_{33} \\ a_{31}\tilde{a}_{11} + a_{32}\tilde{a}_{12} + a_{33}\tilde{a}_{13} & a_{31}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{23} & a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{33}\tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\operatorname{adj} A)A$$

Diagonálne prvky $A(\operatorname{adj} A)$ sú rozvoje $\det A$ podľa riadku, prvky mimo diagonály sú rozvoje determinantu matice, ktorá má dva rovnaké riadky.

Predchádzajúce výpočty sa dajú urobiť pre každé $n \in N$:

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$, $\det A = d$. Potom $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = dI_n$.*

Matica A je regulárna ptáve vtedy, keď $\det A \neq 0$. V takom prípade $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Veta (Cramerovo pravidlo). *Nech $A \in C^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in C^{n\times 1}$ a $\det A = d \neq 0$*

Potom má sústava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jediné riešenie

$\mathbf{x} = \frac{1}{d}(d_1,\ d_2,\ \dots\ d_n)^\top$, kde d_j je determinant matice, ktorá vznikne z matice A zámenou stĺpca A_{*j} za stĺpec pravých strán $\mathbf{b}$.

Príklad. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1\,. \end{aligned} \qquad d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{R_1+R_2} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\,,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{R_1+R_2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\,, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12\,.$$

$x_1 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{6}{6} = 1$, $x_3 = \dfrac{12}{6} = 2$.

Príklad. Pomocou determinantov nájdite inverznú maticu k matici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vypočítajte $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Lineárna závislosť a nezávislosť

Definícia. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in C$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$. Potom

(1) $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazýva lineárna kombinácia prvkov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.

(2) Nech $M \subset C^n$. Množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov množiny M sa nazýva lineárny obal množiny M ($\operatorname{Lo} M$).

(3) Hovoríme, že usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ je lineárne nezávislá, ak

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

(4) Usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$, ktorá nie je lineárne nezávislá sa nazýva lineárne závislá.

(5) Ak $k = n$ a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ je lineárne nezávislá, tak sa nazýva usporiadaná báza priestoru C^n.

Veta.
1. *Usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ prvkov C^n je lineárne závislá práve vtedy, ak sa niektoré $\mathbf{x}_i$ dá vyjadriť ako lineárna kombinácia predchádzajúcich prvkov $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1})$.*
2. *Ak $k > n$, tak každá usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ prvkov C^n je lineárne závislá*
3. *Usporiadaná báza $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ priestoru C^n má vlastnosti:*
   3a. B je lineárne nezávislá, *3b.* $\mathrm{Lo}\, B = C^n$,
   3c. Každé $\mathbf{x} \in C^n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov bázy B.

Veta. *Každá lineárne nezávislá usporiadaná k-tica prvkov C^n sa dá doplniť na usporiadanú bázu C^n.*

Príklad. $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde
$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ je usporiadaná báza priestoru R^3 aj priestoru C^3. Nazýva sa štandardná báza.

Definícia. $M \subset C^n$ sa nazýva podpriestor priestoru C^n, ak
(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$, (2) $\mathbf{x} \in M, \alpha \in C \implies \alpha\mathbf{x} \in M$.

Veta. *$M \subset C^n$ je podpriestorom priestoru C^n vtedy a len vtedy, ak je lineárnym obalom nejakej podmnožiny $B \subset C^n$.*

Definícia. Usporiadaná k-tica $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k) \subset C^n$ sa nazýva usporiadaná báza podpriestoru $M \subset C^n$, ak 1) B je lineárne nezávislá. 2) $\mathrm{Lo}\, B = M$.

Veta. *Všetky usporiadané bázy daného podpriestoru $M \subset C^n$ majú rovnaký počet $k \leq n$ prvkov. Toto číslo sa nazýva dimenzia podpriestoru M $(\dim M)$.*

Definícia. Nech $A \in C^{m \times n}$. Číslo $\dim \mathrm{Lo}\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}\}$ sa nazýva hodnosť matice A (ozn. $h(A)$).

$h(A)$ je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice A.

Veta. *Hodnosť matice A sa nezmení vykonaním ERO a platí*
$h(A) = \dim \mathrm{Lo}\{A_{1*} A_{2*}, \dots, A_{m*}\} = \dim \mathrm{Lo}\{A_{*1} A_{*2}, \dots, A_{*n}\}$.

Veta. *Nech $A \in C^{n \times n}$. Potom*

$$\det A \neq 0 \iff h(A) = n \iff \exists A^{-1}.$$

Veta (Frobeniova)**.** *Sústava lineárnych rovníc má riešenie vtedy a len vtedy, ak sa hodnosť matice sústavy rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.*

Príklady.
1. Určte hodnosť matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
2. Zistite, či $(0,2,3,-1) \in \mathrm{Lo}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ak
   $\mathbf{b}_1 = (0,2,3,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,1,2,-2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1,5,8,-4)$.
3. Zistite, či $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,1,-1)$,
   $\mathbf{b}_3 = (1,2,3)$, je báza priestoru C^3.
4. Určte hodnosť matíc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$