Limita funkcie

$R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ — rozšírená reálna os.

Definícia (Okolie bodu). *Nech* $\epsilon > 0$, $a \in R$.
Množina $O_\epsilon(a) = \{x \in R\colon |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* a, $O_\epsilon^\circ(a) = \{x \in R\colon 0 < |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$ *sa nazýva prstencové* ϵ*-ové okolie bodu* a.
Množina $O_\epsilon(-\infty) = O_\epsilon^\circ(-\infty) = \{x \in R\colon x < -\frac{1}{\epsilon}\} = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* $-\infty$.
Množina $O_\epsilon(\infty) = O_\epsilon^\circ(\infty) = \{x \in R\colon x > \frac{1}{\epsilon}\} = (\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* ∞.

Definícia (Vnutorný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in A$ *sa nazýva vnútorný bod množiny* A, *ak existuje* $O_\epsilon(a)$ *také, že* $O_\epsilon(a) \subset A$. *Množina všetkých vnútorných bodov množiny* A *sa nazýva vnútro* A , *označenie* $IntA$.

Definícia (Hromadný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in R^*$ *sa nazýva hromadný bod množiny* A, *ak pre každé* $O_\epsilon^\circ(a)$ *platí:* $O_\epsilon^\circ(a) \cap A \neq \emptyset$.

Definícia (Limita funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Hovoríme, že funkcia* f *má v bode* a *limitu* $b \in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *ak*
$\forall O_\epsilon(b) \quad \exists O_\delta^\circ(a)\colon f\left(O_\delta^\circ(a) \cap A\right) \subset O_\epsilon(b)$.

Poznámka. Ak $b \in R$, tak hovoríme, že f má v bode a vlastnú limitu, ak $b = \pm\infty$, tak hovoríme, že f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta (Limita zúženia funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $B \subset A$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* A, B. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *tak existuje* $\lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_B\right)(x) = b$.

Definícia (Jednostranné limity). *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* $A \cap (-\infty, a)$, $A \cap (a, \infty)$.
1. Limita $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_{A\cap(-\infty,a)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *zľava.*
2. Limita $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_{A\cap(a,\infty)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *sprava.*

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod* $A\cap(-\infty, a)$, $A\cap(a, \infty)$. *Potom platí: limita funkcie* f *v bode* a *existuje práve vtedy, keď existujú jednostranné limity a rovnajú sa.*

Veta (o výpočte vlastných limít). *Nech* $f, g\colon A \to R$, *a nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in R$. *Potom platí:*
(a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$.
(b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$.
(c) Ak $c \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Ak existuje vlastná limita funkcie* f *v bode* a, *tak existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* f *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená.*

Veta. *Nech* $f, g \colon A \to R$, *nech* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *a nech existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* g *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená. Potom* $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta. *Nech* $f, g \colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon f(x) \leq g(x)$. *Ak existuje* $\lim_{x \to a} f(x)$ *a existuje* $\lim_{x \to a} g(x)$, *tak platí:* $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Dôsledok. *Nech* $f, g, h \colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\} : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. *Ak existujú limity funkcií* f, g *v bode* a *a* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$, *tak existuje* $\lim_{x \to a} h(x) = b$.

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech* $f \colon A \to R$, $g \colon B \to R$ *a nech* $f(A) \subseteq B$. *Ak existuje* $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon f(x) \neq b$ *alebo* $g(b) = c$, *a existuje* $\lim_{x \to b} g(x) = c$, *tak existuje limita zloženej funkcie* $g \circ f \colon A \to R$ *v bode* a *a platí* $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Veta (o výpočte nevlastných limít). *Nech* $f, g \colon A \to R$, $k \in R$. *Potom platí:*
(a) ak existuje $\lim_{x \to a} f(x)$, *tak* $\lim_{x \to a} (-f(x)) = -\lim_{x \to a} f(x)$.
(b) ak $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon k \leq g(x)$, *tak* $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$.
(c) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon 0 < k \leq g(x)$, *tak* $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.
(d) $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon f(x) \neq 0$, *tak* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\} \colon f(x) > 0$, *tak* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Poznámka. Výpočet limity racionálnej funkcie v ∞:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^n + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m} & m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right) \infty & m < n. \end{cases}$$