Konkávnosť, konvexnosť, inflexné body

(Riešené príklady)

V každom z nasledujúcich príkladov určte, kde je funkcia f konkávna, konvexná a kde má inflexné body.

(1.) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ definičný obor $D_f = R \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x(x-1)+e^x\right)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{e^x \cdot x \cdot x - e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2}{x^3} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} =$$

$$= \frac{e^x\left((x-1)^2+1\right)}{x^3}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

konvexná na $(0, \infty)$

konkávna na $(-\infty, 0)$,

inflexné body nemá $(0 \notin D_f)$

(2.) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ definičný obor $D_f = R^+$

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 + \frac{1}{x^2} > 0$$

konvexná na $(0, \infty)$

inflexné body nemá

(3.) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$ definičný obor $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$f''(x) = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f''	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

konvexná na $(-1,1)$
konkávna na $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$
inflexné body $-1, 1$

(4.) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ definičný obor $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (-\ln x)2x}{x^4} = \frac{-x + 2\ln x \cdot x}{x^4} =$$

$$= \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

$f''(x) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

	$(0,\sqrt{e})$	$(\sqrt{e},\infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

konvexná na $(\sqrt{e},\infty)$
konkávna na $(0,\sqrt{e})$
inflexný bod $\sqrt{e}$

(5) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ definičný obor $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= x \cdot \frac{-2-2x^2-4+4x^2}{(1+x^2)^3} = x \cdot \frac{2x^2-6}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

konvexná na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$

konkávna na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$

inflexné body $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$