Lokálne a globálne extrémy.

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *lokálne minimum (ostré lokálne minimum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:* $\forall\, x \in O_\delta(a) \cap A\colon f(x) \geq f(a) \quad (f(x) > f(a))$,
2. *lokálne maximum (ostré lokálne maximum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:* $\forall\, x \in O_\delta(a) \cap A\colon f(x) \leq f(a) \quad (f(x) < f(a))$.

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *globálne minimum, ak* $\forall\, x \in A\colon f(x) \geq f(a)$,
2. *globálne maximum, ak* $\forall\, x \in A\colon f(x) \leq f(a)$.

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in \operatorname{Int} A$. Ak f má v bode a lokálny extrém a je v bode a diferencovateľná, tak $f'(a) = 0$.*

Stacionárny bod — bod, v ktorom má funkcia 1. deriváciu rovnú 0.

Poznámka. Jediné body, v ktorých spojitá funkcia môže nadobúdať extrém sú krajné body definičného oboru, body, v ktorých neexistuje derivácia funkcie, stacionárne body.

Intervaly monotónnosti.

Veta (Postačujúca podmienka monotónnosti). *Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a diferencovateľná na $\operatorname{Int} I$.*

(a) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) \geq 0$, tak f je neklesajúca na I.*
(b) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I.*
(c) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca na I.*
(d) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I.*

Veta (Postačujúca podmienka lokálneho extrému). *Nech funkcia f je 2-krát diferencovateľná na $O_\delta(a)$, nech $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$. Potom platí:*

1. *ak $f''(a) < 0$, tak f má v bode a ostré lokálne maximum,*
2. *ak $f''(a) > 0$, tak f má v bode a ostré lokálne minimum.*

Intervaly konvexnosti, konkávnosti.

Definícia. *Nech I je interval, nech $f\colon I \to R$. Ak $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí:*

(a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (<) \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, *tak f sa nazýva (rýdzo)konvexná funkcia.*

(b) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq (>) \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, *tak f sa nazýva (rýdzo)konkávna funkcia.*

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti, konkávnosti). *Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a dvakrát diferencovateľná na $\operatorname{Int} I$.*

(a) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) \geq 0$, tak f je konvexná na I.*
(b) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I.*
(c) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) \leq 0$, tak f je konkávna na I.*
(d) *Ak $\forall\, x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I.*

Definícia. *Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Ak $\forall\, x_1, x_2 \in O_\delta(a), x_1 < a < x_2\colon f''(x_1)f''(x_2) < 0$, tak a sa nazýva inflexný bod funkcie.*