## Derivácia funkcie

**Definícia.** *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny $A$. Ak existuje vlastná $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, tak číslo $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie $f$ v bode $a$. Hovoríme, že funkcia $f$ je diferencovateľná v bode $a$.*

**Definícia.** *Nech $f\colon A \to R$, $A_1 = \{x \in A\colon \exists\, f'(x)\} \neq \emptyset$. Funkcia $f'\colon A_1 \to R$, ktorá bodu $x \in A_1$ priradí $f'(x)$, sa nazýva derivácia funkcie $f$, hovoríme, že $f$ je diferencovateľná na množine $A_1$. Ak $f'$ je spojitá funkcia, tak hovoríme, že $f$ je spojite diferencovateľná na $A_1$.*

**Veta(Nutná podmienka diferencovateľnosti v bode).** *Ak funkcia $f\colon A \to R$ má deriváciu v bode $a \in A$, tak je v bode $a$ spojitá.*

### Derivácie elementárnych funkcií

| | |
|---|---|
| $[c]' = 0$ | $x \in R,\ c \in R$ |
| $[x^n]' = nx^{n-1}$ | $x \in R,\ n \in N$ |
| $[e^x]' = e^x$ | $x \in R$ |
| $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ | $x \in (0,\infty)$ |
| $[a^x]' = a^x \ln a$ | $x \in R,\ a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ |
| $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$ | $x \in (0,\infty),\ a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ |
| $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$ | $x \in (0,\infty),\ \alpha \in R \setminus \{0\}$ |
| $[\sin x]' = \cos x$ | $x \in R$ |
| $[\cos x]' = -\sin x$ | $x \in R$ |
| $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x \in R \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z\}$ |
| $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $x \in R \setminus \{k\pi,\ k \in Z\}$ |
| $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in (-1,1)$ |
| $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in (-1,1)$ |
| $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $x \in R$ |
| $[\operatorname{arcotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ | $x \in R$ |

**Veta (Derivácia súčtu, súčinu, podielu funkcií).** *Nech $f, g\colon A \to R$ sú diferencovateľné funkcie, nech $c \in R$. Potom $cf, f+g, f\cdot g\colon A \to R$ sú diferencovateľné funkcie a platí:*

$$\begin{array}{ll} (a) & [cf]' = cf' \\ (b) & [f+g]' = f' + g' \\ (c) & [f\cdot g]' = f'g + fg' \end{array}$$

*Ak $\forall\, x \in A\colon g(x) \neq 0$ tak funkcia $\frac{f}{g}\colon A \to R$ je diferencovateľná a platí:*

$$(d) \qquad \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Veta (Derivácia zloženej funkcie).** *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$, $f(A) \subseteq B$ a nech $f, g$ sú diferencovateľné funkcie. Potom $g \circ f\colon A \to R$ je diferencovateľná funkcia a platí:*

$$[g \circ f]' = (g' \circ f)f'.$$

**Veta (Derivácia inverznej funkcie).** *Nech $I, J$ sú intervaly, $f\colon I \to J$ je diferencovateľná bijekcia. Potom inverzná funkcia $f^{-1}\colon J \to I$ je diferencovateľná v bodoch $y \in J\colon \left(f' \circ f^{-1}\right)(y) \neq 0$ a platí:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

**Veta (Dotyčnica ku grafu funkcie).** *Nech $f\colon A \to R$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom dotyčnica ku grafu funkcie v bode $T = (a, f(a))$ je daná rovnicou*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

## Derivácie vyšších rádov

$$\begin{array}{llll} \text{Nech} & f^{(0)}\colon A \to R & f^{(0)} = f & \\ & f^{(1)}\colon A_1 \to R & f^{(1)} = f' & \emptyset \neq A_1 \subseteq A \\ & f^{(2)}\colon A_2 \to R & f^{(2)} = f'' & \emptyset \neq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A \\ & \vdots & \vdots & \\ & f^{(n)}\colon A_n \to R & f^{(n)} = (f^{(n-1)})' & \emptyset \neq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1 \subseteq A \end{array}$$

Funkcia $f^{(n)}$ sa nazýva derivácia n-tého rádu funkcie $f$. Hovoríme, že $f$ je n-krát diferencovateľná na $A_n$. Ak $f^{(n)}$ je spojitá funkcia, tak hovoríme, že $f$ je n-krát spojite diferencovateľná na $A_n$.

## Vlastnosti diferencovateľných funkcií

**Rolleova veta.** *Nech $f$ má nasledujúce vlastnosti:*
1. *je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*
2. *je diferencovateľná na $(a, b)$,*
3. *$f(a) = f(b)$.*

*Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon f'(c) = 0$.*

**Lagrangeova veta (Veta o prírastku funkcie).**
*Nech $f$ má nasledujúce vlastnosti:*
1. *je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*
2. *je diferencovateľná na $(a, b)$.*

*Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*

**Cauchyho veta.** *Nech $f$, $g$ majú nasledujúce vlastnosti:*
1. *sú spojité na $\langle a, b\rangle$,*
2. *sú diferencovateľné na $(a, b)$ a $\forall\, x \in (a, b)\colon g'(x) \neq 0$.*

*Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.*

## L'Hospitalove pravidlá

**Veta "$\left(\frac{0}{0}\right)$".** *Nech $f, g\colon A \to R$, $a \in R^*$ je hromadný bod $A$, nech*
*(a) $f, g$ sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,*
*(b) $\forall\, x \in A \setminus \{a\}\colon g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$,*
*(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.*

*Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.*

**Veta "$\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$".** *Nech $f, g\colon A \to R$, $a \in R^*$ je hromadný bod $A$, nech*
*(a) $f, g$ sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,*
*(b) $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.*

*Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.*