8. domáca úloha – riešenie

(1) $f'(x) = \left[x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' - \left[\sqrt{1+x^2}\right]' =$

$= 1 \cdot \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) -$

$- \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) -$

$- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} -$

$- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

---

(2) Rovnica priamky p v smernicovom tvare je $y = 4x+6$ a jej smernica je 4. Hľadáme teda bod dotyku $[x_0, f(x_0)]$ taký, aby $f'(x_0) = 4$.

Je
$$f'(x) = \left[\ln(x^2-3)\right]' = \frac{1}{x^2-3} \cdot 2x.$$

Riešime teda rovnicu
$$\frac{2x}{x^2-3} = 4$$
$$2x = 4x^2 - 12$$
$$0 = 4x^2 - 2x - 12$$
$$0 = 2x^2 - x - 6.$$

Táto kvadratická rovnica má dva reálne korene: $-\frac{3}{2}$ a 2.

Ak $x_0 = -\frac{3}{2}$, tak $f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3\right) =$

$= \ln\left(-\frac{3}{4}\right)$,

čo nie je definované. Teda pre $x_0 = -\frac{3}{2}$ dotyčnica neexistuje.

Ak $x_0 = 2$, tak $f(x_0) = \ln(2^2 - 3) = \ln 1 = 0$. Z predošlého vieme, že $f'(x_0) = f'(2) = 4$. Keďže bod dotyku je $A = [2, 0]$, rovnica dotyčnice bude

$$y - 0 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8$$

Z uvedeného vyplýva, že to je jediná dotyčnica rovnobežná s priamkou p.