

6. domáca úloha - riešenie

(1.)

Je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x+4} - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{x+4} + 2)}{x+4-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{x+4} + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x (\sqrt{x+4} + 2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) = 1 \cdot 0 \cdot 4 = \underline{\underline{0}}$$

Použili sme vzťahy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2.)

Je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2 - x) = \sin(0^2 - 0) = \sin 0 = 0$$

$$\text{a } -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^3 + x^2}\right) \leq 1,$$

teda funkcia

$$\cos\left(\frac{1}{x^3 + x^2}\right)$$

je ohraničená. Potom podľa vety o limite súčinu nulovej funkcie a ohraničenej funkcie je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2 - x) \cos\left(\frac{1}{x^3 + x^2}\right) = 0.$$

Poznámka: Táto „nulová“ funkcia znamená funkciu, ktorá má limitu 0.

Pozor! L'Hospitalovo pravidlo bolo zotročané!