

4. domáca úloha - riešenie

- (1.) Dostávame dve podmienky: výraz pod odmocninou musí byť nezáporný a výraz v menovateli musí byť rôzny od 0.
Teda

$$\frac{2+x}{2-x} \geq 0$$

Čiže $2-x \neq 0$.

Zrejme

$$2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Podmienka

$$\frac{2+x}{2-x} \geq 0$$

je splnená v dvoch prípadoch:

1) $2-x \geq 0 \wedge 2+x \geq 0$

2) $2-x \leq 0 \wedge 2+x \leq 0$

Koždý z týchto prípadov ušetíme

1) $2-x \geq 0 \wedge 2+x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2 \rangle$

2) $2-x \leq 0 \wedge 2+x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x \leq -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Teda dohromady

$$x \in \langle -2, 2 \rangle.$$

Ak k tomu pridáme podmienku $x \neq 2$, dostaneme

$$D(f) = \langle -2, 2 \rangle.$$

- (2.) Najprv nájdeme predpis pre inverznú funkciu: vyjadríme x pomocou y :

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow y(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}(1-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \frac{y^2}{(1-y)^2}.$$

Teda

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}.$$

Vkážeme, že funkcia f je iniektná,

teda

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Je

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{1+\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_2}}{1+\sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1}(1+\sqrt{x_2}) = \sqrt{x_2}(1+\sqrt{x_1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{x_1} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Vkážeme, že funkcia f je surjektívna,

teda

$$\forall y \in (0,1) \exists x \in (0,\infty): f(x) = y.$$

Z predotieho máme

$$\sqrt{x} = \frac{y}{1-y}.$$

Keďže $y \in (0,1)$, platí $\frac{y}{1-y} \geq 0$, teda

$\frac{y}{1-y} \in (0,\infty)$, čiže $\sqrt{x} \in (0,\infty)$. Odhal-

áe plynie $x \in (0,\infty)$, čo bolo treba dokázať.

Pre úplnosť treba ukázať, že

$\forall x \in (0,\infty): f(x) \in (0,1)$ (čo to, pravda, implicitne plynie zo zadania).

Nech $x \in (0,\infty)$. Potom $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \geq 0$.

$$\text{Dalej } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1,$$

teda $f(x) \in (0,1)$, čo bolo treba dokázať.