

3. domáca úloha - riešenie

① Poradieme Gaussu-Jordanovu metódu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & p+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & p & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} R_3 + 2R_2 \\ \frac{1}{p} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{p} & \frac{2}{p} & \frac{1}{p} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim R_1 - 3R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 + \frac{6}{p} & -\frac{4}{p} & -\frac{2}{p} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{p} & \frac{2}{p} & \frac{1}{p} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim R_1 - 3R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 + \frac{6}{p} & -3 - \frac{4}{p} & -\frac{2}{p} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{p} & \frac{2}{p} & \frac{1}{p} \end{array}\right)$$

Teda hľadáme číslo $p \in \mathbb{R}$, pre ktoré

$$\begin{pmatrix} 4 + \frac{6}{p} & -3 - \frac{4}{p} & -\frac{2}{p} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{p} & \frac{2}{p} & \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

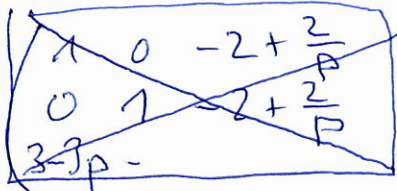
vidíme, že jedinú takú hodnotu je $p = 1$.

Iné riešenie:

Hľadáme $p \in \mathbb{R}$, aby

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -7 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Platí, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -7 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 + \frac{2}{p} \\ 0 & 1 & -2 + \frac{2}{p} \\ 3-3p & -2+2p & -1 + \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$


Teda musí platiť -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 + \frac{2}{p} \\ 0 & 1 & -2 + \frac{2}{p} \\ 3-3p & -2+2p & -1 + \frac{2}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vidíme, že to nastáva len pre $p=1$.

(2.) Označme hodnotu determinantu D .
Rozvieme determinant podľa tretieho
radku. Dortcheme

$$D = (-1)^{3+3} p \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

vypočítame pomocou pravidla

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 4 - (2 + 2 + 1) = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - (1 + 2 + 2) = -3$$

Dortcheme

$$D = (-1)^{3+3} p (-3) + (-1)^{3+4} \cdot 1 (-3) = -3p + 3.$$

mať byť -

$$-3p + 3 = 0,$$

teda jediné možné riešenie je

$$p=1.$$