

10. domácí úloha - řešení

1. Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n}$$

$$a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

Jsou geometrické řady s kvocienty v
absolutní hodnotě menšími než 1. Proto
obě řady konvergují, a tedy konverguje
až jejich rozdíl a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

$$\text{Pro řadu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n}$$

máme první nenulový člen $a=1$ a kvocient

$q = \frac{1}{2}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n} = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{Pro řadu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$$

máme první nenulový člen $a = \frac{1}{4}$ a

kvocient $q = \frac{3}{4}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Nakonec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = 2 - 1 = 1.$$

2. z prednosťou máme, že

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Príklad

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - a^{n+1}}{1 - b^{n+1}} = \frac{1 - b}{1 - a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - b^{n+1}}$$

keďže

$$|a| < 1, |b| < 1,$$

máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b^{n+1} = 0,$$

preto

$$L = \frac{1 - b}{1 - a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - b^{n+1}} = \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1}}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b^{n+1}} =$$

$$= \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{1 - b}{1 - a}$$