Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{x + 1}.$$

a, Napíšte deriváciu funkcie f.
b, Pre akú hodnotu parametra $a \in R$ má funkcia f v bode $x_0 = 0$ lokálny extrém? Určte aký je to extrém.
c, Pre akú hodnotu parametra $a \in R$ je funkcia f párna?
d, Pre akú hodnotu parametra $a \in R$ má funkcia f asymptotu v nekonečne s rovnicou $y = x + 3$?
e, Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f ak viete, že $a \geq 6$.
Napíšte **celý** postup riešenia.

Riešenie

a, $\quad D_f = R \setminus \{-1\}$
Derivujeme f.

$$f'(x) = \frac{2x^2 + ax + 2x + a - x^2 - ax - 5}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + a - 5}{(x+1)^2}$$

b,
$f'(x) = 0$ práve vtedy, keď $x^2 + 2x + a - 5 = 0$. Ak je stacionárny bod v bode $x_0 = 0$, tak dostaneme $a - 5 = 0$, a teda hodnota parametra $a = 5$.
(Pri hodnote parametra $a = 5$ je druhý stacionárny bod $x_1 = -2$.)
Funkcia $f'(x)$ je na $(-1, \infty)$ spojitá, preto na intervaloch $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$ nemení znamienko.
Pri hodnote parametra $a = 5$ je $f'(-\frac{1}{2}) = -3 < 0$ a $f'(1) = \frac{3}{4} > 0$.
Stacionárny bod $x_0 = 0$ je bod OLMIN.
c, Funkcia nie je nikdy párna, lebo jej definičný obor nie je symetrická množina.
d, Podľa zadania je $k = 1$ a $q = 3$.
Preto

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 + ax + 5}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + 5}{x^2 + x}.$$

Táto rovnosť platí pre každé a.
Ďalej musí byť

$$3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + 5}{x+1} - 1x$$

Pretože

$$3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + 5}{x+1} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + 5 - x^2 - x}{x+1} = a - 1,$$

musí (v tejto časti) byť $a = 4$.
e, Pretože

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + a - 5}{(x+1)^2},$$

znamienko $f'(x)$ závisí len od znamienka čitateľa

$$x^2 + 2x + a - 5.$$

Pre $a \geq 6$ je

$$x^2 + 2x + a - 5 \geq x^2 + 2x + 6 - 5 = (x + 1)^2.$$

$(x + 1)^2 > 0$ pre všetky $x \in D_f$, preto je funkcia f (pre $a \geq 6$) rastúca na intervaloch $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

Príklad 2.

a, Rozhodnite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{n^2-1}.$$

b, Rozhodnite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2-1}.$$

c, Akú podmienku musí spĺňať konštanta k, aby rad

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+2}{n^k-1}$$

bol konvergentný?
Odpoveď zdôvodnite.

V každej časti napíšte celý postup riešenia.

Riešenie

a, Rad v tejto časti je rad so striedavými znamienkami.
Použijeme Leibnitzovo kritérium.
Overme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=0$$

Prvá podmienka konvergencie je splnená.
Teraz overme, či od nejakého n je

$$\frac{3n+2}{n^2-1}>\frac{3n+5}{(n+1)^2-1}.$$

Úpravou dostaneme

$$(3n+2)(n^2+2n)>(n^2-1)(3n+5).$$

$$3n^2+7n+5>0.$$

Posledná nerovnosť platí pre všetky $n\geq 2$, preto aj druhá podmienka konvergencie je splnená.
Teda rad konverguje.

b, Použijeme porovnávacie kritérium
Pretože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n+2}{n^2-1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2-1}=3>0,$$

majú rad z časti b, a harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

rovnaký charakter konvergencie.
Harmonický rad diverguje, preto aj rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2-1}$$

diverguje.
c, Vieme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konverguje pre $\alpha > 1$.
Limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+2}{n^k-1}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{1+\alpha}+2n^{\alpha}}{n^k-1}$$

je nenulová a konečná, práve vtedy, keď sú najväčšie exponenty rovnaké. Teda musí byť

$$1+\alpha = k.$$

Ak je $\alpha > 1$, tak $k > 2$.
Rad v časti c, konverguje pre $k > 2$.

Príklad 3.

a, Vypočítajte

$$\int x \operatorname{arctg} 3x \, dx.$$

b, Akú strednú hodnotu má funkcia

$$f(x) = x \operatorname{arctg} 3x$$

na intervale $\langle 0, \frac{1}{3} \rangle$?

c, Ako sa zmení výsledok v časti a), ak namiesto konštanty 3 bude v argumente funkcie arkustangens konštanta k?

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie

Počítame

$$\int x \operatorname{arctg} 3x \, dx$$

metódou per partes.

V prvom kroku volíme

$f' = x, \qquad g = \operatorname{arctg} 3x. \qquad$ Dostaneme

$f = \frac{1}{2}x^2, \qquad g' = \dfrac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3.$

Preto

$$\int \int x \operatorname{arctg} 3x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3}{2} \frac{x^2}{1+9x^2} \, dx$$

Delením

$$x^2 : (9x^2+1) = \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{9}}{9x^2+1} = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9x^2+1}\right)$$

dostaneme

$$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3}{2} \frac{x^2}{1+9x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \int 1 - \frac{1}{9x^2+1} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}\frac{1}{9} \int \frac{1}{x^2 + (\frac{1}{3})^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + c =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{18} \operatorname{arctg} 3x + c$$

b, Strednú hodnotu počítame ako

$$\frac{1}{\frac{1}{3} - 0} \int_0^{\frac{1}{3}} x \operatorname{arctg} 3x \, dx.$$

Primitívnu funkciu sme vypočítali v časti a,.

$$3\int_0^{\frac{1}{3}} x \operatorname{arctg} 3x\, dx = 3\left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}\operatorname{arctg} 3x\right]_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{3}{18}\operatorname{arctg} 1 - \frac{3}{18} + \frac{3}{18}\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{6}\left(2\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}.$$

c, Opakujeme výpočet z časti a, s parametrom k.
Počítame

$$\int x \operatorname{arctg} kx\, dx$$

metódou per partes.
V prvom kroku volíme
$f' = x, \qquad g = \operatorname{arctg} kx. \qquad$ Dostaneme
$f = \frac{1}{2}x^2, \qquad g' = \dfrac{1}{1+(kx)^2}\cdot k.$
Preto

$$\int\int x \operatorname{arctg} kx\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} kx - \int \frac{k}{2}\,\frac{x^2}{1+k^2x^2}\, dx$$

Delením

$$x^2 : (k^2x^2+1) = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{k^2x^2+1}\right)$$

dostaneme

$$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} kx - \int \frac{k}{2}\,\frac{x^2}{1+k^2x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} kx - \frac{1}{2k}\int 1 - \frac{1}{k^2x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} kx - \frac{1}{2k}x + \frac{1}{2k}\,\frac{1}{k^2}\int \frac{1}{x^2 + (\frac{1}{k})^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} kx - \frac{1}{2k}x + \frac{1}{2k^2}\operatorname{arctg} kx + c$$