Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)(x-3)}{\sqrt{x+1}-2} & \text{pre } x \in (3, \infty), \\ 12 & \text{pre } x = 3, \\ b \cdot \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) & \text{pre } x \in (-\infty, 3). \end{cases}$$

a, Určte hodnoty parametrov $a,\ b \in R$ tak, aby funkcia f bola spojitá v bode $x = 3$.

b, Nájdite na intervale $(-1, 3)$ všetky stacionárne a inflexné body funkcie f.

Riešenie.

Počítajme limitu

$$\lim_{x\to 3+} \frac{(x-a)(x-3)}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3+} \frac{(x-a)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = 4(3-a).$$

Ak je funkcia f spojitá, musí byť

$$4(3-a) = 12.$$

Preto $a = 0$.

Počítajme aj limitu

$$\lim_{x\to 3-} b \cdot \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = b \cdot \operatorname{arccotg} \sqrt{3} = b \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Ak je funkcia f spojitá, musí byť

$$b \cdot \frac{\pi}{6} = 12.$$

Preto $b = \dfrac{72}{\pi}$.

b, Riešime pre $b \neq 0$.

Na intervale $(-1, 3)$ je $f(x) = b \cdot \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

Počítajme

$$f'(x) = b \cdot \frac{-1}{1+\frac{x^2}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-b\sqrt{3}}{3+x^2}.$$

pretože $f'(x) \neq 0$, funkcia nemá na danom intervale žiadne stacionárne body.

Počítajme

$$f''(x) = \frac{2b\sqrt{3}x}{(3+x^2)^2}.$$

Rovnosť

$$f''(x) = 0$$

platí len pre $x_0 = 0$.

Súčasne funkcia f'' mení znamienko pri prechode cez nulu, preto je $x_0 = 0$ inflexný bod funkcie f.

Príklad 2. a, Rozhodnite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

b, Zistite, či existuje $c \in R$, pre ktoré platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 4.$$

Riešenie.

a, Použijeme D'Alembertovo kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Preto je rad v časti a, konvergentný.

b,

Súčet geometrického radu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{c}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5c}{3}.$$

Aby

$$\frac{5c}{3} = 4,$$

musí byť

$$c = \frac{12}{5}.$$

Príklad 3. a, Použitím vhodnej substitúcie vypočítajte integrál

$$\int_2^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}\,dx.$$

Napíšte celý postup riešenia.

b, Ako sa zmení výsledok z časti a, ak hornú hranicu integrálu nahradíme konštantou b^3+1 pričom $b>0$?

Riešenie

Použijeme substitúciu

$$x = y^3+1, \qquad dx = 3y^2\,dy.$$

Nové hranice budú $1=\sqrt[3]{2-1}$ a $2=\sqrt[3]{9-1}$.

Po nej dostaneme

$$\int_1^2 \frac{y}{1+y^3}\,3y^2 dy = \int_1^2 \frac{3y^3}{1+y^3}\,dy =$$

$$= 3\int_1^2 1-\frac{1}{1+y^3}\,dy = 3[y]_1^2 - 3\int_1^2 \frac{1}{1+y^3}\,dy$$

Integrovanú racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky.

Polynóm $1+y^3$ má len jeden reálny koreň, a to $x_1=-1$. Po rozklade na súčin (napr. Hornerova schéma, alebo delenie $(1+y^3):(y+1)$) dostaneme

$$1+y^3 = (y+1)(y^2-y+1).$$

Preto

$$\frac{1}{1+y^3} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2-y+1}.$$

Z rovnosti

$$1 = A(y^2-y+1) + (By+C)(y+1)$$

vypočítame

$A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$.

Teda integrujeme

$$3\int_1^2 \frac{1}{1+y^3}\,dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} - \frac{y-2}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= [\ln|y+1|]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2y-1-3}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}[\ln|y^2-y+1|]_1^2 + \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}[\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}})\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})$$

Teda

$$\int_2^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}\,dx = 3 - \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

b,
Namiesto hranice 9 použijeme b^3+1
Po substitúcií bude horná hranica pre y rovná b.
Preto

$$\int_2^{b^3+1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}\,dx = 3(b-1)-\ln(b+1)+\ln 2+\frac{1}{2}\ln(b^2-b+1)-\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2b-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}\right). \blacksquare$$