Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}.$$

a, Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie v bode $[?, 0]$.
b, Nájdite intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie f.
c, Vypočítajte

$$\lim_{x \to -\infty} f(x),$$

a tiež limitu v každom stacionárnom bode funkcie f.
Napíšte **celý** postup riešenia.

Riešenie

a, Ak $f(x) = 0$, tak

$$\frac{x-1}{x^2+3} = 0.$$

To je práve vtedy, keď$x = 1$.
Bod dotyku je teda $[1, 0]$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+3) - (x-1)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}.$$

Rovnica dotyčnice je

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x-1).$$

b,

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

$f'(x) = 0$ práve vtedy, keď $-x^2+2x+3 = 0$. Stacionárne body sú body $x_1 = -1$, a $x_2 = 3$.

Funkcia $f'(x)$ je na R spojitá, preto na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ a $(3, \infty)$ nemení znamienko.

$f'(-10) < 0$, $f'(0) > 0$ a $f'(10) < 0$.

Preto je f rastúca na intervale $[-1, 3]$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty, -1]$ a $[3, \infty)$.

Stacionárny bod $x_1 = -1$ je bod OLMIN Stacionárny bod $x_2 = 3$ je bod OLMAX. $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{6}$.

c,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0$$

V stacionárnych bodoch je funkcia f spojitá a teda limity sú rovné funkčným hodnotám,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2+3} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x^2+3} = \frac{1}{6}.$$

Príklad 2. Je daný rad $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{2n} + (-1)^n}{2^{4n}}.$$

a, Vypočítajte súčet radu.

b, Uvažujeme rad s konštantou k namiesto 3,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot k^{2n} + (-1)^n}{2^{4n}}.$$

Zistite pre ktoré hodnoty konštanty k rad konverguje a pre ktoré diverguje.

c, Rozhodnite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3n+1)^n}{(2n+1)^{2n}}.$$

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie

a, Rad rozdelíme na súčet dvoch geometrických radov

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{2n}}{2^{4n}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}}.$$

V každom nájdeme prvý člen radu a kvocient.

$a_{01} = \frac{4 \cdot 3^4}{2^8} = \frac{81}{64} \qquad q_1 = \frac{9}{16}, \qquad a_{02} = \frac{1}{256} \qquad q_2 = \frac{-1}{16}.$

Pretože $|q_1| < 1$ aj $|q_2| < 1$, oba geometrické rady konvergujú. Ich súčty sú

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{2n}}{2^{4n}} = \frac{81}{64} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{81}{28}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}} = \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{16 \cdot 17}.$$

Celkový súčet je

$$S = \frac{81}{28} + \frac{1}{16 \cdot 17}.$$

b, Kvocient geometrického radu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot k^{2n}}{2^{4n}}$

je

$$q = \frac{k^2}{2^4} = \frac{k^2}{16}$$

Rad konverguje práve keď $|q| < 1$, a to je keď $k \in (-4, 4)$.

Pre $k \notin (-4, 4)$ rad diverguje. To isté platí aj pre celý rad z časti b.

c, Použijeme Cauchyho kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+3n+1)^n}{(2n+1)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n+1)}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{4n^2+4n+1} = \frac{1}{4} < 1,$$

a preto rad konverguje.

Príklad 3. Nájdite dve rôzne primitívne funkcie k funkcii

$$f(x) = x^2 \cdot \arcsin x.$$

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie

Počítame

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx$$

metódou per partes. Volíme $\quad f' = x^2, \qquad g = \arcsin x.$

Dostaneme $\quad f = \frac{1}{3}\, x^3, \qquad g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Preto

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \arcsin x - \int \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Integrál

$$\int \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

počítame pomocou substitúcie

$$y = 1 - x^2, \qquad dy = -2x \, dx.$$

(K správnemu riešeniu vedie aj iná substitúcia, napríklad $y = \sqrt{1-x^2}$.)

Pri nej je

$$x^2 = 1 - y.$$

Dostaneme

$$\int \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{6} \int (1-y) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = -\frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} \, dy =$$

$$= -\frac{1}{6} \left(2\sqrt{y} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) + c = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + c.$$

Dosadením dostaneme

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + c.$$

V otázke sa pýtame na dve rôzne primitívne funkcie, stačí teda zvoliť dve rôzne konštanty c, napríklad $c = 0$ a $c = 1$ a dostaneme

$$F_1(x) = \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3},$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}\, x^3 \cdot \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + 1.$$

(Iné dvojice voľby konštanty c sú samozrejme tiež správne.)

Príklad 4. Použitím vhodnej substitúcie vypočítajte integrál

$$\int_0^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}\,dx.$$

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie

Použijeme substitúciu

$$x = y^3, \qquad dx = 3y^2\,dy.$$

Nové hranice budú $0 = \sqrt[3]{0}$ a $2 = \sqrt[3]{8}$.

Po nej dostaneme

$$\int_0^2 \frac{y}{1+y^3}\,3y^2 dy = \int_0^2 \frac{3y^3}{1+y^3}\,dy =$$

$$= 3\int_0^2 1 - \frac{1}{1+y^3}\,dy = 3[y]_0^2 - 3\int_0^2 \frac{1}{1+y^3}\,dy$$

Integrovanú racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky.

Polynóm $1+y^3$ má len jeden reálny koreň, a to $x_1 = -1$. Po rozklade na súčin (napr. Hornerova schéma, alebo delenie $(1+y^3) : (y+1)$) dostaneme

$$1 + y^3 = (y+1)(y^2 - y + 1).$$

Preto

$$\frac{1}{1+y^3} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2-y+1}.$$

Z rovnosti

$$1 = A(y^2 - y + 1) + (By + C)(y + 1)$$

vypočítame

$A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.

Teda integrujeme

$$3\int_0^2 \frac{1}{1+y^3}\,dy = \int_0^2 \frac{1}{y+1} - \frac{y-2}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= [\ln|y+1|]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2y-1-3}{y^2-y+1}\,dy = \ln 3 - \frac{1}{2}[\ln|y^2-y+1|]_0^2 + \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{1}{(y-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}[\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})\right) = \frac{1}{2}\ln 3 + \sqrt{3}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$$

Teda

$$\int_0^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}\,dx = 6 - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$