5 Derivácia. Monotónnosť a lokálne extrémy.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.
Hovoríme, že funkcia f je na intervale I:

- neklesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$
- rastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
- nerastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$
- klesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$

Veta (o monotónnosti). *Nech $f : I \to R$ je funkcia diferencovateľná, na intervale I.*
Potom f je na intervale I:

- *neklesajúca, práve vtedy keď $\forall x \in I$ platí $f'(x) \ge 0$*
- *nerastúca, práve vtedy keď $\forall x \in I$ platí $f'(x) \le 0$*

Ak $\forall x \in I$ platí

- *$f'(x) > 0$, tak je funkcia f rastúca*
- *$f'(x) < 0$, tak je funkcia f klesajúca.*

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.
Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0:

- lokálne minimum, ak $\exists O_\delta(x_0)$ také, že $\forall x \in O_\delta(x_0)$ platí $f(x) \ge f(x_0)$,
- ostré lokálne minimum, ak naviac $\forall x \in O^\circ_\delta(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$.
- lokálne maximum, ak $\exists O_\delta(x_0)$ také, že $\forall x \in O_\delta(x_0)$ platí $f(x) \le f(x_0)$,
- ostré lokálne maximum, ak naviac $\forall x \in O^\circ_\delta(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$.

Veta (o lokálnych extrémoch). *Nech $f : I \to R$ je funkcia spojitá, na intervale $(a, b) \subset I$ a diferencovateľná na intervaloch (a, x_0), (x_0, b).*
Potom ak

- *$\forall x \in (a, x_0)$ platí $f'(x) > 0$ a súčasne $\forall x \in (x_0, b)$ platí $f'(x) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum,*
- *$\forall x \in (a, x_0)$ platí $f'(x) < 0$ a súčasne $\forall x \in (x_0, b)$ platí $f'(x) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.*

Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia rastúca resp. klesajúca a jej lokálne extrémy.

1. $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 7x - 7$.
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$.
5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$. (Pozor na D_f .)
6. $f(x) = \ln(1 - x^2)$.
7. $f(x) = e^{x^2}(x^2 - 3)$.
8. $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.
9. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

10. $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$.
11. $f(x) = \ln(\cos x)$.

    Porovnajte výsledky príkladov 10 a 11.

Výsledky

1. Rastúca na $(-\infty, \frac{1}{2}]$ a na $[\frac{14}{12}, \infty)$, klesajúca na $[\frac{1}{2}, \frac{14}{12}]$.
   Bod $x_1 = \frac{1}{2}$ je bodom ostrého lokálneho maxima, bod $x_2 = \frac{14}{12}$ je bodom ostrého lokálneho minima.
2. Rastúca na $(-\infty, -1]$ a na $[1, \infty)$, klesajúca na $[-1, 0)$ a na $(0, 1]$.
   Bod $x_1 = -1$ je bodom ostrého lokálneho maxima, bod $x_2 = 1$ je bodom ostrého lokálneho minima.
3. Rastúca na celom R.
4. Rastúca na $[0, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, 0]$.
   Bod $x_1 = 0$ je bodom ostrého lokálneho minima.
5. Rastúca na $[-2, -\sqrt{2})$ a na $[2, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, -2]$ a na $(\sqrt{2}, 2]$.
   Body $x_1 = -2$ $x_2 = 2$ sú bodmi ostrého lokálneho minima.
6. Rastúca na $(-1, 0]$, klesajúca na $[0, 1)$.
   Bod $x_1 = 0$ je bodom ostrého lokálneho maxima.
7. Rastúca na $[-\sqrt{2}, 0]$ a na $[\sqrt{2}, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, -\sqrt{2}]$ a na $[0, \sqrt{2}]$.
   Bod $x_1 = 0$ je bodom ostrého lokálneho maxima, body $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ sú bodmi ostrého lokálneho minima.
8. Rastúca na $(-\infty, -2]$ a na $[0, 2]$, klesajúca na $[-2, 0]$ a na $[2, \infty)$.
9. Rastúca na $[0, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, 0]$.
10. Rastúca na $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, klesajúca na $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ pre $k \in Z$. Pre $k \in Z$ body $x_{2k} = 2k\pi$ sú bodmi ostrého lokálneho maxima, body $x_{2k+1} = \pi + 2k\pi$ sú bodmi ostrého lokálneho minima.