4. Derivácia

Príklad 1. Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Riešenie. Použijeme vetu o derivovaní podielu

$$f'(x) = \frac{(x+2)'\sqrt{x^2+1} - (x+2)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+2)(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}})}{x^2+1}$$

Výsledok ešte vieme trochu upraviť.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Všimnime si, že $D_f = R$ aj $D_{f'} = R$.

Príklad 2. Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$$

Riešenie. Použijeme vetu o derivovaní zloženej funkcie.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}\,(x^2-4x+3)' = \frac{1}{x^2-4x+3}\,(2x-4) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}.$$

Uvedomme si ale, že definičný obor funkcie f teraz nie je R.
Aby bol logaritmus definovaný, musí byť $x^2 - 4x + 3 > 0$.
To je práve vtedy, keď $x > 3$ alebo $x < 1$.
Teda $D_f = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že definičný obor derivácie je $R \setminus \{1, 3\}$. To je ale chyba, lebo derivácia môže byť definovaná len tam, kde je definovaná aj pôvodná funkcia. (Presnejšie $D_{f'} \subseteq D_f$.)

Preto $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Príklad 3. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A ak

$$f(x) = \ln\sqrt{5-x^2}$$

a bod $A = [?, 0]$.

Riešenie.

Najprv vypočítajme prvú súradnicu dotykového bodu A. Musí pre ňu platiť

$$\ln\sqrt{5-x^2} = 0.$$

Preto

$$\sqrt{5-x^2} = 1, \qquad \text{a teda } 5 - x^2 = 1.$$

Teda

$x^2 = 4$ a $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Body dotyku sú $A_1 = [2, 0]$ a $A_2 = [-2, 0]$.

Teraz vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-x}{5 - x^2}$$

(Derivácia sa dala počítaťaj šikovnejšie, rozmyslite si, ako.)

Smernica dotyčnice je hodnota f' v danom x

$$k_1 = f'(x_1) = f'(2) = -2,$$
$$k_2 = f'(x_2) = f'(-2) = 2.$$

Rovnica dotyčnice v bode A_1 je

$$y - 0 = -2(x - 2).$$

Rovnica dotyčnice v bode A_2 je

$$y - 0 = 2(x + 2).$$