11 Neurčitý integrál

Veta(o substitučnej metóde II). *Nech* $\varphi : I \to J$ *je diferencovateľná bijekcia* $f : J \to R$ *je spojitá funkcia a nech* $H : I \to R$ *je primitívna funkcia k* $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$*. Potom*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = H(t) + c = H(\varphi^{-1}(x)) + c$$

Použitím substitúcie vypočítajte neurčité integrály.

1. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+1}\,dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\,dx$
3. $\int \sqrt{2-x^2}\,dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

Výsledky.

1. $2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} - \ln(x+1) + c$, 2. $x - 6\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}+1| + c$,
3. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + c = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + c.$
4. $6\left(\dfrac{-x^{\frac{10}{6}}}{10} + \dfrac{x^{\frac{8}{6}}}{8} + \dfrac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \dfrac{x}{6} - \dfrac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \dfrac{x^{\frac{4}{6}}}{4} + \dfrac{x^{\frac{3}{6}}}{3} - \dfrac{x^{\frac{2}{6}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\ln(x^{\frac{2}{6}}+1) + \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}}\right) +$
$+c.$

Integrovanie racionálnych funkcií.

1. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$
2. $\int \frac{x^2-3}{x+2}\,dx$
3. $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$
4. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
5. $\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx$
6. $\int \frac{x^2-2}{3x^2+2x+1}\,dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^2+6x+10}\,dx$

Výsledky.

1. $\ln|x+1|$
2. $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+2| + c$
3. $\frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{5}{2}\ln|x+2| + c$
4. $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$
5. $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \arctan\frac{x+2}{2} + c$
6. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\ln|3x^2+2x+1| - \frac{19}{9\sqrt{2}}\arctan\frac{3x+1}{\sqrt{2}} + c$
7. $\frac{x^2}{2} - 6x + 13\ln|x^2+6x+10| - 18\arctan(x+3) + c$