

10 NEURČITÝ INTEGRÁL

Príklad 1. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Riešenie.

Využijeme rovnosť

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

Potom

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c.$$

Príklad 2. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \ln^2 x \, dx$$

Riešenie.

Označme

$$\begin{aligned} f' &= 1 & f &= x \\ g &= \ln^2 x & g' &= 2 \ln x \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\int \ln^2 x \, dx = x \cdot \ln^2 x - \int x 2 \ln x \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx.$$

Opäť použijeme metódu per partes a pri označení

$$\begin{aligned} f' &= 1 & f &= x \\ g &= \ln x & g' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

dostaneme

$$x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \left(x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \right) = x \cdot \ln^2 x - 2 (x \cdot \ln x - x) = x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c.$$

Príklad 3. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x (\arctg x)^2 \, dx$$

Riešenie.

Zvoľme

$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= (\arctg x)^2 & g' &= 2 \arctg x \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} 2 \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Počítajme posledný integrál

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

zvlášť.

Použijeme v ňom metódu per partes a zvolíme

$$\begin{aligned} f' &= \frac{x^2}{1+x^2} & f &= x - \operatorname{arctg} x \\ g &= \operatorname{arctg} x & g' &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Poznamenajme, že funkciu f sme vypočítali ako

$$f = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \operatorname{arctg} x$$

Teraz dostaneme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{1+x^2} dx &= (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x - \int (x - \operatorname{arctg} x) \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Integrál

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx = (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx,$$

pri použití metódy per partes, kde

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{1+x^2} & f &= \operatorname{arctg} x \\ g &= \operatorname{arctg} x & g' &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Preto

$$2 \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx = (\operatorname{arctg} x)^2$$

a

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

Postupným dosadzovaním dostaneme

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\operatorname{arctg} x)^2 - (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + c$$

Príklad 4. Použitím substitúcie vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = \ln x, \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

vedie k

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int y^5 dy = \frac{1}{6} y^6 = \frac{1}{6} (\ln x)^6 + c.$$

Príklad 5. Použitím substitúcie vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\cos x}{3 + \cos^2 x} dx$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = \sin x, \quad dy = \cos x dx$$

vedie k

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{3 + \cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{3 + 1 - y^2} dy = \int \frac{1}{4 - y^2} dy = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2 + y} dy + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2 - y} dy = \\ &= \frac{1}{4} \ln |2 + y| - \frac{1}{4} \ln |2 - y| = \\ &= \frac{1}{4} \ln |2 + \sin x| - \frac{1}{4} \ln |2 - \sin x| = \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + c. \end{aligned}$$