

## PREDNÁŠKA 17.

### INTEGRAČNÉ METÓDY

V mnohých situáciách nevystačíme len s použitím elementárnych vzorcov a vety o linearite neurčitého integrálu.

Potrebuje aj ďalšie metódy analogicky ako v kapitole o diferenciálnom počte. Metóda integrovania per partes a substitučná metóda sú odvodené z viet o derivovaní súčinu a zloženej funkcie.

#### METÓDA INTEGRÁCIE PER PARTES

Základom metódy integrácie per partes je veta o derivovaní súčinu. Pripomeňme ju (vo vzťahoch nižšie vynechávam označenie premennej,  $f$  je  $f(x)$  a  $g$  je  $g(x)$ .)

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$

Ak sa teraz skúsime vrátiť späť, a spýtame sa, čo sme derivovali, dostaneme sa k rovnosti

$$\int (f \cdot g)' dx = \int f'g + fg' dx.$$

Na ľavej strane sa pýtame na primitívnu funkciu k derivácii  $(f \cdot g)'$ . To je ale pôvodná funkcia  $f \cdot g$ .

Na pravej strane použijeme linearitu integrálu. Dostaneme:

$$f \cdot g = \int f'g dx + \int fg' dx.$$

Teraz si predstavme, že jeden z integrálov na pravej strane je „ťažký“. Vieme ho vyjadriť pomocou druhého z nich. Teda

$$\int f'g dx = f \cdot g - \int fg' dx.$$

Tento postup má zmysel, ak integrál na ľavej strane nevieme vypočítať, ale integrál na pravej strane rovnice áno. Metódu zhrnieme do vety.

**Veta(o metóde per partes).** *Nech  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int x \cdot e^x dx.$$

**Riešenie.**

Zvoľme

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = x,$$

potom

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 1.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int x \cdot \sin x dx.$$

**Riešenie.**

Zvoľme

$$f'(x) = \sin x, \quad g(x) = x,$$

potom

$$f(x) = -\cos x, \quad g'(x) = 1.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c.$$

Z predošlých dvoch príkladov vidíme, že kľúčovým miestom riešenia je voľba, ktorú funkciu zvoliť za  $f'$  a ktorú za  $g$ .

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int \ln x dx.$$

**Riešenie.** Tu sa zdá, že v zadaní nie je súčin dvoch funkcií. Považujeme preto jeden činiteľ za konštantnú funkciu 1 a zvolíme

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \ln x.$$

Potom

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c.$$

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\int x^2 e^x dx.$$

**Riešenie.** Zvolíme

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = x^2,$$

potom

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 2x.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx.$$

Teraz použijeme opakovanú metódu per partes.

Zvolíme

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = 2x,$$

potom

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 2.$$

$$x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - \left( 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c.$$

**Príklad 5.** Vypočítajme

$$\int x \operatorname{arctg} x dx.$$

**Riešenie.** Zvolíme

$$f'(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

potom

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx.$$

A po úprave

$$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$$

**Príklad 6.** Vypočítajme

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

**Riešenie.** Zvolíme

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \ln x,$$

potom

$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Z posledného vzťahu je

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x.$$

Teda

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c.$$