

PREDNÁŠKA 16.

INTEGRÁLNY POČET

V tejto časti prednášok uvidíme základný koncept neurčitého a určitého integrálu funkcie jednej reálnej premennej.

Všimneme si, čím sa neurčitý a určitý integrál líšia a čo majú spoločné.

Zvládneme základné integračné techniky a uvidíme niektoré aplikácie integrálneho počtu.

NEURČITÝ INTEGRÁL

V kapitole venujúcej sa diferenciálnemu počtu sme definovali deriváciu funkcie f . Derivácia v danom bode x_0 je pojem lokálny, založený na existencii istej limity v tomto bode.

Pre funkciu f , ktorá má deriváciu v každom bode intervalu I , sme zaviedli deriváciu f' ako funkciu definovanú na intervale I .

V tomto zmysle môžeme chápať derivovanie ako proces - operáciu, ktorá každej diferencovateľnej funkcii priradí jej deriváciu.

Schematicky:

$$f \longrightarrow f'$$

Položme si otázku, či vieme pri znalosti výsledku derivovania rekonštruovať pôvodnú funkciu f .

Takúto operáciu nazývame inverzná a ak sa nám ju podarí zaviesť, budeme ju volať integrovanie.

Na začiatok niekoľko motivačných príkladov.

Pre neznámu funkciu $F(x)$ zavedme označenie

$$F'(x) = f(x).$$

Ak teraz poznáme

$$F'(x) = f(x) = 2x$$

vieme nájsť pôvodnú funkciu F ?

Väčšinou nám hneď napadne odpoveď $F(x) = x^2$. Je samozrejme správna, ale nie jediná možná. Rovnako dobrá odpoveď je $F(x) = x^2 + 3$. A zrazu máme nekonečne veľa správnych odpovedí, ktoré sa ale na seba „podobajú“. Pôvodnú funkciu teda nevieme nájsť jednoznačne.

A ešte môžeme porozmýšľať, či nevieme nájsť $F(x)$ nejakého iného tvaru, odlišného od $x^2 + c$. To nám, aspoň na prvý pokus, nejde.

V nasledujúcej definícii pomenujeme správne odpovede a vo vete tvrdíme, že žiadne odpovede, odlišné od $x^2 + c$, nie sú.

Definícia. Nech $f : I \rightarrow R$, pričom I je interval. Funkciu $F : I \rightarrow R$ takú, že pre každé $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$, nazývame primitívna funkcia k funkcii f .

Veta. *Nech $F_1, F_2 : I \rightarrow R$ sú primitívne funkcie k funkcii f .
Potom $F_1(x) - F_2(x) = c$.*

Pretože dôkaz je priamočiary, uvedieme aj ten.

Dôkaz. Ak $F_1, F_2 : I \rightarrow R$ sú primitívne funkcie k tej istej funkcii f , potom

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{aj} \quad F_2'(x) = f(x).$$

Preto

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Jediné funkcie, ktoré majú na intervale nulovú deriváciu sú konštantné.

Teda $F_1(x) - F_2(x) = c$. $\square$

Na základe predošlej definície a vety, môžeme hovoriť o množine všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii $f : I \rightarrow R$. Pritom stačí poznať jednu primitívnu funkciu a ňou sú už určené všetky.

Množinu všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii nazývame neurčitý integrál.

Značíme ju

$$\int f(x) dx.$$

Pretože s množinami sa pracuje trochu ťažkopádne, rozumieme pod označením $\int f(x) dx$ niektorú z primitívnych funkcií k funkcii f a hovoríme, že

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

V kapitole diferenciálny počet sme odvodili tabuľku derivácií elementárnych funkcií. Teraz, po výmene stĺpcov a malých úpravach, z nej zostavíme tabuľku elementárnych neurčitých integrálov. Tu je:

Elementárne neurčité integrály.

$$\begin{array}{ll} \int 0 dx = c & \int e^x dx = e^x + c \\ \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, \\ \int \cos x dx = \sin x + c, & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + c, \\ \int \sin x dx = -\cos x + c, & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + c. & \end{array},$$

Vo vyššie uvedených vzorcoch sme neuvažovali o definičných oboroch funkcií. Rovnosti platia vždy na takom intervale I , na ktorom je definovaná aj integrovaná funkcia na ľavej strane rovnosti, aj primitívna funkcia na pravej strane.

Rovnako ako v diferenciálnom počte, aj pri integrovaní využijeme vlastnosť linearitu.

Veta(o linearite). *Nech $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú primitívne funkcie k funkciám f a g . Potom funkcia $\alpha F(x) + \beta G(x)$ je primitívna k funkcii $\alpha f + \beta g$.*

Dôkaz. Priamo derivovaním $\alpha F(x) + \beta G(x)$ dostaneme

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

□

V inom označení má linearita neurčitého integrálu podobu

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Príklad 1.

$$\int x + 2 \cos x dx = \int x dx + 2 \int \cos x dx = \frac{x^2}{2} + 2 \sin x + c.$$

Príklad 2.

$$\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c.$$

Príklad 3.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctg x + c.$$

Príklad 4.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sin 2x} dx &= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} dx = \\ &= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int |\sin x + \cos x| dx = \\ &= \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{ak } \sin x + \cos x \geq 0 \\ -\sin x + \cos x & \text{ak } \sin x + \cos x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Príklad 5.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + c.$$

Prirodzená je otázka, ktoré funkcie majú primitívnu funkciu resp. neurčitý integrál.

Veta. *Každá spojitá funkcia na intervale I má primitívnu funkciu.*

Poznamenajme, že ak je funkcia spojitá, a teda má primitívnu, to ešte neznamená, že ju vieme aj vypočítať. Primitívna funkcia sa nemusí dať vyjadriť pomocou konečného počtu používaných elementárnych funkcií. Príkladom takej funkcie je e^{-x^2} .

Ak potrebujeme primitívnu funkciu k spojitýj funkcii tohoto typu, nemáme inú možnosť, ako zaviesť nové pomenovanie elementárnej funkcie. (Napríklad v štatistike používaná primitívna funkcia k e^{-x^2} dostala pomenovanie $\operatorname{erf}(x)$ z anglického error function.)