PREDNÁŠKA 14.

KRITÉRIÁ KONVERGENCIE, POKRAČOVANIE

3. Cauchyho kritérium.

Toto kritérium, ktorého autorom je francúzsky matematik Augustin Louis Cauchy (1789-1857), je založené na porovnaní neznámeho radu s radom geometrickým.

Ak totiž v rade

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

s nezápornými sčítancami a_n, považujeme a_n za n-tú mocninu kvocientu, tak

$$q = \sqrt[n]{a_n}.$$

Samozrejme, ak rad nie je geometrický tak pre každé n vznikne iný „kvocient " q_n. Rozhodnutie o konvergencii robíme podľa kvocientu limitného.

Veta (Cauchy). *Nech* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Potom

- *ak* $l > 1$, *rad diverguje do* ∞,
- *ak* $0 \le l < 1$, *rad konverguje.*

Všimnime si, že veta nehovorí nič o prípade $l = 1$, v takom prípade pomocou Cauchyho kritéria nevieme rozhodnúť.

Príklad 1. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{2n-1}\right)^n$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Podľa Cauchyho kritéria je rad konvergentný.

Príklad 2. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 3. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Rad je divergentný.

Príklad 4. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 5. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n-2}{2^n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3+4n-2}{2^n}}$$

Počítaniu poslednej limity sa vyhneme použitím porovnávacieho kritéria.

Pretože

$$\frac{n^3+4n-2}{2^n} < \frac{5n^3}{2^n}$$

použijeme Cauchyho kritérium pre rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

je konvergentný a teda aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4n - 2}{2^n}$$

je konvergentný.

3. D'Alembertovo kritérium.

Ďalším z francúzskych matematických velikánov je Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), ktorý vytvoril kritérium, založené na porovnaní neznámeho radu s radom geometrickým.

Jeho metóda je založená na tom, že v geometrickej postupnosti je kvocient pomerom nasledujúceho člena ku predchádzajúcemu.

Kritérium je založené na limitnej hodnote tohoto pomeru.

Veta (D'Alembert). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Potom

- *ak* $l > 1$, *rad diverguje do* ∞,
- *ak* $0 \leq l < 1$, *rad konverguje.*

Príklad 6. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \cdot 2}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 7. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{((n+1)^2)}}}{\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2(n!)^2}{2^{(n^2+2n+1)}}}{\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 8. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\,n!(n+2)\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{\frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Rad je konvergentný.

Na záver tejto časti poznamenajme, že Cauchyho a d'Alembertovo kritérium sú rovnako silné.

Rozdiel v nich je len v zložitosti výpočtu limity. Zatiaľ čo Cauchyho zvané tiež odmocninové kritérium je vhodné pre rady s n-tými mocninami, d'Alembertovo (podielové) kritérium je vhodné pre rady s faktoriálmi.

Ale nemôže sa stať, že v príklade, kde je bezmocné jedno z nich, rozhodne druhé. Presnejšie platí veta.

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l_C$$

a limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l_A.$$

Potom

$$l_C = l_A.$$