Prednáška 13.

Kritériá konvergencie

Pretože úloha nájsť súčet nekonečného radu je vo všeobecnosti ťažká, pokúsime sa aspoň zistiť, či rad vôbec nejaký konečný súčet má (je konvergentný) alebo nie (je divergentný).

V tejto kapitolke uvedieme niekoľko často používaných kritérií.

1. Nutná podmienka konvergencie.

Intuitívne je jasné, že ak pripočítavame čísla a_n, ktoré sú väčšie ako kladná konštanta k, teda ak sa v každom kroku súčet zväčší aspoň o k, tak postupnosť čiastočných súčtov bude divergovať do nekonečna.

Aby mohol rad konvergovať, potrebujeme členy a_n zmenšovať pod akúkoľvek kladnú konštantu k. Teda $a_n \to 0$.

Presnejšie: (a aj bez predpokladu nezápornosti a_n)

Ak rad

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

konverguje, t.j. existuje konečná limita postupnosti čiastočných súčtov

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

tak aj o jeden krok oneskorená limita je rovnaká

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}.$$

Rozdiel posledných dvoch rovností je

$$0 = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(Pripomeňme, že $S_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ a $S_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$.)

Teda a_n musí mať limitu 0.

Veta o nutnej podmienke. *Nech rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je konvergentný číselný rad.*

Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Veta o nutnej podmienke umožňuje dokázať divergenciu radu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ tým spôsobom, že vypočítame $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Príklad 1. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Pretože $a_n = \cos\dfrac{1}{n}$, počítajme

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

Rad nesplĺňa nutnú podmienku, preto je divergentný.

Treba ale hneď povedať, že ak je aj nutná podmienka splnená, ešte to neznamená, že rad je konvergentný.

Ukazuje to aj nasledujúci, dôležitý príklad.

Príklad 2 (Harmonický rad). Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Počítajme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nutná podmienka je teda splnená.

Ukážeme, že napriek tomu je harmonický rad divergentný.

Počítajme čiastočné súčty

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

Ďalej budeme odhadovať.

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2,$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = 2 + \frac{1}{2}.$$

A všeobecne

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \cdots + 2^{n-1}(\frac{1}{2^n}) = 1 + n\,\frac{1}{2}.$$

Preto limita postupnosti čiastočných súčtov je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + n\,\frac{1}{2}\right) = \infty,$$

a teda, napriek splnenej nutnej podmienke, harmonický rad diverguje do ∞.

2. Porovnávacie kritérium.

Na rozdiel od nutnej podmienky je porovnávacie kritérium určené len pre rady s nezápornými členmi $a_n \geq 0$.

Novinka je aj v tom, že pomocou neho vieme rozhodnúť nielen o divergencii, ale aj o konvergencii porovnávaného radu.

Hlavná myšlienka je porovnať rad, o konvergencii alebo divergencii ktorého chceme rozhodnúť, s radom známym.

Ak známy rad s menšími sčítancami diverguje, tak aj rad s väčšími sčítancami diverguje.

Podobne ak známy rad s väčšími sčítancami konverguje, tak aj rad s menšími (ale nezápornými) sčítancami konverguje.

Formálne znenie je v nasledujúcej vete.

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sú nekonečné číselné rady.*

Nech $\forall n \geq n_0$ *platí*

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom:

- *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje, tak aj rad* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverguje.*
- *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak aj rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Príklad 3. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Položme $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ a porovnajme rad zo zadania s radom

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

O tomto rade vieme z poedošlej kapitoly, že je konvergentný. (A vieme aj nájsť jeho súčet.)

Súčasne je

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} \qquad \text{pre } n \geq 2.$$

Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje.

Príklad 4. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Porovnajme rad zo zadania s radom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

o ktorom vieme, že je divergentný.

Súčasne je

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{pre } n \geq 1.$$

Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje.

Výsledky príkladov 3 a 4 vime zovšeobecniť aj pre iné súčty prevrátených hodnôt mocnín n.

Tvrdenie. *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *diverguje pre* $0 < \alpha \leq 1$*, a konverguje pre* $\alpha > 1$*.*

Tvrdenie by sme pre $0 < \alpha \leq 1$ dokázali rovnako, ako divergenciu radu v príklade 4 a pre $\alpha \geq 2$ tak, ako sme dokázali konvergenciu radu v príklade 3.

Ak ste si všimli medzeru $1 < \alpha \leq 2$*, tak tu by sme na dôkaz konvergencie potrebovali metôdu, ktorú sa naučíme neskôr.*

Príklad 5. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2n + 3}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Zrejme je

$$\frac{n+1}{n^3 + 2n + 3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

(Zväčšili sme čitateľa a zmenšili menovateľa.)

Ale rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje, a preto aj menší rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2n + 3}$$

konverguje.

Príklad 6. Zistime, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n+3} \qquad .$$

Riešenie.

Použijeme porovnanie

$$\frac{n^2+1}{n^3+2n+3} \geq \frac{n^2}{n^3+2n^3+3n^3} = \frac{1}{6n}.$$

(Zmenšili sme čitateľa a zväčšili menovateľa.)

Ale rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje, a preto aj väčší rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n+3}$$

diverguje.

Niekedy je jednoduchšia pre použitie porovnávacia veta v nasledujúcej verzii.

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sú nekonečné číselné rady s nezápornými členmi.*

Nech existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$.

Potom oba rady majú rovnaký charakter konvergencie.

Príklad 7. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Počítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pretože je konečná a kladná, majú rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{a tiež} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

rovnaký charakter konvergencie. Ale o harmonickom rade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

vieme, že diverguje. Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

diverguje.