Prednáška 12.

Nekonečné rady

Definícia. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nekonečná číselná postupnosť.

Výraz $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \dots$ nazývame nekonečný číselný rad. Značíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Číslo $S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_N$ nazývame N-tý čiastočný súčet nekonečného radu.

Príklad 1. Vezmime biely obdĺžnik s rozmermi 1x2 metre. Rozdeľme ho na polovice a jednu z nich zafarbime na čierno. Biely zvyšok opäť rozdeľme na polovice a jednu zafarbime na čierno. Takto pokračujeme ďalej.

Aká časť je zafarbená po n krokoch? A v limite pre $n \to \infty$?

Po piatich krokoch má čierna plocha veľkosť

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

Po n krokoch je čierna plocha veľkosti

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}},$$

a teda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 2.$$

Definícia. Nech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad.

Číslo $S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_N$ nazývame N-tý čiastočný súčet radu.

Ak postupnosť čiastočných súčtov $\{S_N\}$ konverguje, tak číslo

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N$$

nazývame súčet radu a hovoríme, že rad je konvergentý.

Inak hovoríme, že rad je divergentný.

Príklad 2. Majme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots.$$

$$S_n = n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do ∞.

Príklad 3. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots .$$

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}.$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje a jeho súčet je $\frac{3}{2}$.

Príklad 4. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots .$$

$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0, \dots .$

$$\lim_{n \to \infty} S_n \quad \textit{neexistuje.}$$

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ diverguje.

Príklad 5. Majme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nájdime jeho súčet.

Riešenie.

Pretože

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(rozklad na elementárne zlomky), je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Potom n-tý čiastočný súčet radu je

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ \dots \ + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Po vyrušení rovnako veľkých zlomkov s opačným znamienkom je

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

a

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje a jeho súčet je 1.

Príklad 6. Majme rad
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Nájdime jeho súčet.

Riešenie.

Pretože
$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1},$$

je
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \right).$$

Potom n-tý čiastočný súčet radu je

$$S_n = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{3} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{4} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{5} \right) + \ldots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{n-2} - \frac{\frac{1}{2}}{n} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \right).$$

Po vyrušení rovnakých zlomkov (všimnite si druhý zlomok v prvej zátvorke a prvý zlomok v tretej, rozmyslite si, ktoré ďalšie dvojice zlomkov sa ešte rušia) je
$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}$$

a teda
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \right) = \frac{3}{4}.$$

Rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ konverguje a jeho súčet je $\frac{3}{4}$.

Metóda z príkladov 5 a 6 sa dá použiť len v špeciálnych prípadoch, nie všeobecne, dokonca ani nie pre všetky konvergentné rady, ktorých n-tý člen sa dá rozložiť na súčet elementárnych zlomkov.

(*Nefunguje napr. pre rad* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-4}$ *, o ktorom neskôr ukážeme, že konverguje.*)

Geometrický rad

Geometrický rad je zaujímavý tým, že ak je konvergentný, tak vieme ľahko vypočítať jeho súčet.

Definícia. Nech $c \neq 0$. Rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c\,q^n$ nazývame geometrický rad.

Číslo q nazývame kvocient.

Poznamenajme, že geometrický rad je nekonečný súčet geometrickej postupnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\,q^n = c(1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \dots).$$

O konečných súčtoch geometrickej postupnosti, teda o konečných geometrických radoch vieme, že ich súčet je pre $q \neq 1$

$$S_N = c\,\frac{1-q^N}{1-q}.$$

Podľa definície súčtu nekonečného radu teda potrebujeme počítať limitu

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} c\,\frac{1-q^N}{1-q}.$$

Z úvah o postupnosti q^N vieme, že jej limita je 0 ak $|q| < 1$, nekonečno ak $q > 1$ a pre $q \leq -1$ neexistuje. Tieto úvahy zhrnieme do vety.

Veta. *Geometrický rad je konvergentný práve vtedy, keď jeho kvocient q spĺňa nerovnosť $|q| < 1$.*

Súčet konvergentného geometrického radu je daný vzťahom

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n = \frac{c}{1-q}.$$

Ak je $q \geq 1$, geometrický rad diverguje do $+\infty$.

Ak je $q \leq -1$, geometrický rad diverguje.

Príklad 7. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n}.$$

Nájdime jeho súčet.

Riešenie. Po prepise na tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

je jasné, že $c = 2$ a kvocient $q = \frac{1}{5}$.

Podľa vzorca z Vety je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Rad v príklade je teda konvergentný a jeho súčet je $\frac{5}{2}$.

Príklad 8. Majme rad
$$\sum_{n=2}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Nájdime jeho súčet.

Riešenie. Chyták je skrytý v tom, že n nezačína od nuly, ale od $n = 2$.

Prvý sčítanec v rade je teda $a_2 = 4\frac{4}{9}$.

Toto číslo vieme vyňať z každého sčítanca, a preto je $c = a_2$.

Kvocient $q = \frac{2}{3}$.

Podľa vzorca z Vety je
$$\sum_{n=2}^{\infty} 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{16}{3}.$$

Príklad 9. Majme rad
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-3}{5^n}.$$

Nájdime jeho súčet.

Riešenie. Rad v zadaní nie je geometrický!

Vieme ho ale rozdeliť na dva rady. Ak sú oba geometrické a konvergentné, tak je konvergentný aj rad zo zadania a vieme vypočítať jeho súčet.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-3}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Koeficient c je v prvom rade $c_a = \frac{4}{5}$ a v druhom $c_b = \frac{3}{5}$ (začíname od $n = 1$).

Kvocient q je v prvom rade $q_a = \frac{4}{5}$ a v druhom $q_b = \frac{1}{5}$.

Podľa vzorca z Vety je
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-3}{5^n} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} - \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}} = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}.$$

Poznámka. Pri riešení sme využili fakt, že súčet (resp. rozdiel) dvoch konvergentných radov je konvergentný rad.

Rozmyslite si, že súčet (resp. rozdiel) dvoch divergentných radov nemusí byť divergentný rad.