Prednáška 6.

Diferenciálny počet, pokračovanie

Derivácia inverznej funkcie

Výsledok, ktorý prezentujeme v tejto časti, slúži na odvodenie vzorcov pre derivovanie inverzných funkcií.

Uvažujme o bijektívnej funkcii $f : A \to B$ a k nej inverznej funkcii $g = f^{-1} : B \to A$.

Nech bod $x_0 \in A$ a $f(x_0) = y_0$. Použijeme ešte označenie $y = f(x)$.

Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, tak

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = k.$$

Predpokladajme, že $k \neq 0$.

Potom

$$\frac{1}{k} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}.$$

Teda inverzná funkcia má deriváciu v bode y_0 a

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{k}.$$

Veta (o derivácii inverznej funkcie). *Nech $f : I \to J$ je diferencovateľná a bijektívna funkcia na svojom definičnóm intervale I. Nech $f'(x) \neq 0$ na I.*

Potom inverzná funkcia $f^{-1} : J \to I$ je diferencovateľná na intervale J a platí

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Príklad 1. Majme funkciu $f(x) = e^x$. Inverzná funkcia je $g(y) = f^{-1}(y) = \ln y$.

Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = e^x$$

rôznu od nuly na celom R.

Podľa vety o derivovaní inverznej funkcie je

$$g'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Príklad 2. Majme funkciu $f(x) = \sin x$ definovanú na intervale $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Inverzná funkcia je $g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin y$, definovaná na intervale $J = (-1, 1)$.

Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = \cos x,$$

ktorá je rôzna od nuly na $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Podľa vety o derivovaní inverznej funkcie je

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Využitím vzorca

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

upravíme výsledok do tvaru

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Príklad 3. Majme funkciu $f(x) = \cos x$ definovanú na intervale $I = (0, \pi)$. Inverzná funkcia je $g(y) = f^{-1}(y) = \arccos y$, definovaná na intervale $J = (-1, 1)$.

Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = -\sin x,$$

ktorá je rôzna od nuly na I.

Podľa vety o derivovaní inverznej funkcie je

$$g'(y) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)}.$$

Využitím vzorca

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

upravíme výsledok do tvaru

$$g'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Príklad 4. Majme funkciu $f(x) = \operatorname{tg} x$ definovanú na intervale $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Inverzná funkcia je $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ definovaná na R.

Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Podľa vety o derivovaní inverznej funkcie je

$$g'(y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Príklad 5. Majme funkciu $f(x) = \operatorname{cotg} x$ definovanú na intervale $I = (0, \pi)$. Inverzná funkcia je $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg} y$ definovaná na R.

Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

Podľa vety o derivovaní inverznej funkcie je

$$g'(y) = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg} y)} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Predchádzajúce výsledky budeme v ďalšom využívať ako elementárne vzorce.

Geometrický význam derivácie

Derivácia funkcie f v bode x_0 je smernicou priamky

$$y - f(x_0) = k(x - x_0),$$

ktorú nazveme dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$. Pritom $k = f'(x_0)$.
(V predchádzajúcej časti sme s pojmom dotyčnica pracovali na intuitívnej úrovni.)

Príklad 6. Vypočítajme rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

v bode $A = [1, ?]$.

Riešenie. Otáznik znamená, že k určeniu bodu A stačí poznať jeho prvú súradnicu.
Vypočítajme

$$f(1) = \sqrt{2}.$$

Preto $A = [1, \sqrt{2}]$.
Funkcia f má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad .$$

Jej hodnota v bode 1 je

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rovnica dotyčnice ku grafu v bode A je

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1).$$

Výraz

$$f'(x_0)(x - x_0)$$

na pravej strane rovnice dotyčnice nazývame prvý diferenciál funkcie f v bode x_0. Značíme ho

$$d(f, x, x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Teda v rovnici dotyčnice je

$$y = f(x_0) + d(f, x, x_0).$$

V približných výpočtoch sa vychádza z predstavy, že hodnota funkcie f sa blízko bodu x_0 len málo líši od hodnoty na dotyčnici a teda $d(f, x, x_0)$ je odhadovaný prírastok k hodnote $f(x_0)$.

Príklad 7. Vypočítajme rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie

$$f(x) = \sin x$$

v bode $A = [\frac{\pi}{6}, ?]$ a napíšme 1. diferenciál funkcie f v bode $\frac{\pi}{6}$.

Riešenie.

Vypočítajme
$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$
Preto $A = [1, \frac{1}{2}]$.

Funkcia f má deriváciu
$$f'(x) = \cos x.$$
Jej hodnota v bode $\frac{\pi}{6}$ je
$$f'(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Rovnica dotyčnice ku grafu v bode A je
$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}).$$
Prvý diferenciál v bode $\frac{\pi}{6}$ je
$$df(x, \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}).$$

Príklad 8. Vypočítajme rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$$
v bode $A = [?, -\frac{3}{2}]$ a napíšme 1. diferenciál funkcie f príslušnom bode.

Riešenie.

Teraz je neznáma prvá súradnica bodu dotyku A.

Počítajme
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3} = -\frac{3}{2}.$$
Riešením tejto rovnice je
$$2x + 1 = -\frac{3}{2}(x^2 - 3),$$
a teda
$$\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{2} = 0.$$
Korene tejto kvadratickej rovnice sú $x_1 = 1$ a $x_2 = -\frac{7}{3}$.

Preto budeme uvažovať o dvoch bodoch dotyku $A_1 = [1, -\frac{3}{2}]$ a $A_2 = [-\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}]$.

Funkcia f má deriváciu
$$f'(x) = \frac{2(x^2-3) - (2x+1)2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 6}{(x^2-3)^2}.$$
Jej hodnota v bode $x_1 = 1$ je
$$f'(1) = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Rovnica dotyčnice ku grafu v bode A_1 je

$$y + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}(x - 1).$$

Prvý diferenciál v bode 1 je

$$df(x, 1) = -\frac{5}{2}(x - 1).$$

Hodnota derivácie v bode $x_2 = -\frac{7}{3}$ je

$$f'(-\frac{7}{3}) = -\frac{45}{22}.$$

Rovnica dotyčnice ku grafu v bode A_2 je

$$y + \frac{3}{2} = -\frac{45}{22}\left(x + \frac{7}{3}\right).$$

Prvý diferenciál v bode 1 je

$$df\left(x, -\frac{7}{3}\right) = -\frac{45}{22}\left(x + \frac{7}{3}\right).$$

V niektorých aplikáciach sa používa približný výpočet založený na nahradení krivky jej dotyčnicou v okolí bodu dotyku. Tento proces sa nazýva linearizácia.