

## PREDNÁŠKA 11.

### POSTUPNOSTI A NEKONEČNÉ RADY

Predchádzajúcou prednáškou sme skončili prvú veľkú kapitolu, diferenciálny počet.

V tejto časti si povieme niečo o konečných a hlavne nekonečných postupnostiach reálnych čísel.

Hlavným cieľom kapitoly je naučiť sa, ako a kedy ich vieme sčítať.

### POSTUPNOSTI

Začnime príkladom postupnosti

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, ?, \dots$$

To je úloha, ktorá sa vyskytuje v ťažšej alebo ľahšej verzii aj v inteligenčných testoch a otázka väčšinou znie: Aké číslo je na mieste otáznika?

Po istej úvahe odpovieme, že 64.

Ak sa ale opýtame, ako sme na to prišli, dostaneme dva druhy odpovede. Jedna z nich je: Každé číslo je dvojnásobok predošlého.

Druhý typ odpovede je: Každé číslo je mocnina dvojky, a to taká, na akom mieste sa číslo nachádza (ak začíname nultým).

Táto odpoveď nám hovorí, že postupnosť je vlastne zobrazenie, ktoré poradovému číslu  $n$  priradí (reálnu) hodnotu  $a_n$ .

V našom prípade

$$6 \rightarrow 2^6,$$

$$n \rightarrow 2^n.$$

Postupnosť je teda funkcia na prirodzených číslach. Označme  $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definícia.** Zobrazenie  $f : N_0 \rightarrow \mathbb{R}$  nazývame nekonečná číselná postupnosť.

Značíme

$$f(n) = a_n.$$

Číslo  $a_n$  voláme  $n$ -tý člen postupnosti.

*Postupnosť nemusí začínať nultým členom, môže začať od člena  $a_{n_0}$  s ľubovoľným daným  $n_0$ .*

Pre postupnosť používame tiež označenie

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{prípadne} \quad \{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}.$$

Postupnosť z motivačnej ukážky môžeme teda zapísať ako

$$f(n) = 2^n \text{ alebo tiež } \{2^n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Vráťme sa k prvému typu odpovede.

V ňom je skrytý pojem rekurencia (rekurzia), čo súvisí s informatickým pojmom cyklus.

Predpis pre generovanie postupnosti z úvodu kapitoly je

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n,$$

a ešte potrebujeme poznať začiatok

$$a_0 = 1.$$

Dvojicu

$$a_{n+1} = g(a_n),$$

$$a_0 = c,$$

v ktorej je funkciou  $g$  dané, ako sa z  $n$ -tého člena postupnosti vypočíta nasledujúci, nazývame rekurencia.

**Príklad 1.** Z rekurentného zápisu

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

$$a_0 = c,$$

nájdite postupnosť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Riešenie.**

Počítajme postupne  $a_0 = c$ ,  $a_1 = c + d$ ,  $a_2 = a_1 + d = c + 2d$ , a  $a_n = a_{n-1} + d = c + nd$ .

(Presný dôkaz sa urobí matematickou indukciou.)

Teda

$$f(n) = c + nd.$$

**Príklad 2.** Z rekurentného zápisu

$$a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

$$a_0 = c,$$

nájdite postupnosť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Riešenie.**

Počítajme postupne  $a_0 = c$ ,  $a_1 = cq$ ,  $a_2 = a_1q = cq^2$ , a  $a_n = a_{n-1}q = cq^n$ .

Teda

$$f(n) = cq^n.$$

Postupnosť z príkladu 1 voláme aritmetická a číslo  $d$  voláme diferencia.

Postupnosť z príkladu 2 voláme geometrická a číslo  $q$  voláme kvocient.

Budeme sa teraz venovať otázke, či sa pre  $n$  idúce do nekonečna hodnoty postupnosti  $a_n$  blížia k nejakému (limitnému) číslu alebo nie.

**Definícia.** Postupnosť  $f : N_0 \rightarrow R$ ,  $f(n) = a_n$  nazývame konvergentná, ak existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Inak ju nazývame divergentná.

Poznámka. Divergentná postupnosť môže mať limitu  $L = \infty$  ( $-\infty$ ), vtedy hovoríme, že postupnosť diverguje do  $\infty$  ( $-\infty$ ), alebo nemá žiadnu limitu.

**Príklad 3.** Zistite, či je postupnosť  $f(n) = \frac{1}{n}$  konvergentná alebo divergentná.

**Riešenie.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Preto je postupnosť  $f(n) = \frac{1}{n}$  konvergentná.

**Príklad 4.** Zistite, či je postupnosť  $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  konvergentná alebo divergentná.

**Riešenie.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Preto je postupnosť  $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  konvergentná.

**Príklad 5.** Zistite, či je postupnosť  $f(n) = 2^n$  konvergentná alebo divergentná.

**Riešenie.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Preto je postupnosť  $f(n) = 2^n$  divergentná a diverguje do  $\infty$ .

**Príklad 6.** Zistite, či je postupnosť  $f(n) = (-1)^n$  konvergentná alebo divergentná.

**Riešenie.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ neexistuje.}$$

Preto je postupnosť  $f(n) = (-1)^n$  divergentná.

**Príklad 7.** Zistite, či je postupnosť  $f(n) = \sqrt[n]{n}$  konvergentná alebo divergentná.

Tu použijeme vetu o limite zúženia preformulovanú na prípad postupností.

**Tvrdenie.** *Nech  $f : R_0^+ \rightarrow R$  je funkcia, pomocou ktorej je vytvorená postupnosť  $f(n) : N_0 \rightarrow R$ .*

*Potom ak existuje limita*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

*tak aj*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L.$$

**Riešenie príkladu 7.**

Použijeme funkciu  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Preto aj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

a postupnosť  $f(n) = \sqrt[n]{n}$  je konvergentná.

**KONEČNÉ RADY**

Postupnosť

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

nazývame konečná postupnosť. (Počet jej členov je  $N$ .)

Výraz

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$$

nazývame konečný rad. Značíme ho

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

**Konečný aritmetický rad.**

Konečný aritmetický rad je súčet členov konečnej aritmetickej postupnosti

$$c, c + d, c + 2d, \dots, c + (N - 1)d.$$

Označme ho ako

$$S_N = c + (c + d) + (c + 2d) + \dots + (c + (N - 1)d).$$

Po troche počítania dostaneme

$$S_N = Nc + \frac{1}{2}N(N - 1)d.$$

Alebo tiež

$$S_N = \frac{1}{2}N(c + c + (N - 1)d) = \frac{1}{2}N(a_0 + a_{N-1}).$$

**Príklad 8.**

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \sum_{n=1}^N n = \frac{1}{2}N(1 + N).$$

**Príklad 9.**

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2N - 1) = \sum_{n=1}^N (2n - 1) = \frac{1}{2}N(1 + 2N - 1) = N^2.$$

**Konečný geometrický rad.**

Konečný geometrický rad je súčet členov konečnej geometrickej postupnosti

$$c, cq, cq^2, \dots, cq^{N-1}.$$

Označme ho ako

$$S_N = c + cq + cq^2 + \dots + cq^{N-1}.$$

Teraz

$$S_N = c(1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1}) = c \sum_{n=0}^{N-1} q^n.$$

Rozlíšime dve možnosti.

Ak  $q = 1$ , tak

$$S_N = cN.$$

Ak  $q \neq 1$ , tak z rovnosti

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1}) \cdot (1 - q) = 1 - q^N$$

(overte ju roznásobením) dostaneme

$$S_N = c \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

**Príklad 10.** Pri pravidelnom vklade 100 eur po dobu 10 rokov a garantovanom úroku 2% bude na konci obdobia uložená suma

$$S_{11} = 100 \frac{1 - 1.02^{11}}{1 - 1.02} \doteq 1217.$$

Kvôli priamemu použitiu formuly sme na konci posledného roku urobili ešte jeden (jedenásty) vklad.

Pretože v praxi nikto neurobí 11-ty vklad a hneď na to výber, výsledok sporenia je zaokrúhlene 1117 eur.

*Výpočet z príkladu 10 sa volá zložené úrokovanie.*