Prednáška 10.

L'Hospitalovo pravidlo

Francúzsky šľachtic, markíz de l'Hospital bol okrem iného aj matematikom a autorom oceňovanej učebnice analýzy. Vyšla na prelome 17. a 18. storočia a hovorí sa o nej, ako o prvej „modernej" učebnici diferenciálneho počtu.

V tejto knihe sa objavila aj veta, ktorá hovorí, ako počítať niektoré limity použitím derivácií.

Veta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nech $f : A \to R$, $g : A \to R$ sú diferencovateľné funkcie a nech x_0 je hromadný bod A.*

Nech buď

a. existujú limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

alebo

b. existujú limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Potom ak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, tak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Povedané hovorovou rečou, ak počítaš limitu podielu dvoch funkcií, pričom obe sa blížia buď k nule, alebo obe do nekonečna, môžeš podiel funkcií nahradiť podielom smerníc ich dotyčníc. Ak limita existuje, tak je rovnaká, ako limita pôvodného podielu.

Použime l'Hospitalovo pravidlo v príkladoch.

Príklad 1. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Riešenie.

Výsledok už dopredu poznáme, chceme ale vidieť postup pomocou l'Hospitalovho pravidla.

Pretože

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \qquad \text{aj } \lim_{x\to 0} x = 0,$$

je splnený predpoklad a.

Počítajme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Pretože táto limita existuje, tak aj

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V nasledujúcich príkladoch použijeme zaužívaný zrýchlený zápis.

Príklad 2. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Pri tomto zápise je prvé rovnítko „podmienené", platí len ak druhá limita existuje.

(Tu môžeme tiež poznamenať, že ak limita podielu derivácií neexistuje, tak o limite pôvodného podielu nevieme povedať nič.)

Príklad 3. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Nasledujúci príklad ukazuje, že l'Hospitalovo pravidlo sa dá použiť opakovane.

Príklad 4. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3-3x+1}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty.$$

Vyriešený príklad okrem opakovaného použitia l'Hospitalovho pravidla má aj teoretické zošeobecnenie. Vidíme z neho, že exponenciálna funkcia rastie do nekonečna rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm.

Príklad 5. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x.$$

Riešenie.

V zadaní nie je podiel, preto treba najprv upraviť súčin na podiel funkcií, ktoré spĺňajú predpoklad a, alebo b, a až potom počítať limitu pomocou l'Hospitalovho pravidla .

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}-x=0.$$

Nevadí, že prirodzený logaritmus má v nule limitu sprava rovnú $-\infty$, pre použitie vety môžeme považovať znamienko „-" za vyňaté pred limitu a potom podiel spĺňa predpoklad b.

Príklad 6. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Riešenie.

Aj v tomto príklade potrebujeme najprv limitovaný rozdiel upraviť.

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Uvedomme si, že v priebehu výpočtu treba v každom kroku kontrolovať, či sú splnené predpoklady l'Hospitalovej vety. V poslednom podieli už je limita menovateľa rovná 2, preto sme už l'Hospitalovo pravidlo nemohli (a ani nepotrebovali) použiť.

Príklad 7. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{1-\cos x}\right).$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{2x(1-\cos x)+x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2}{2(1-\cos x)+4x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x}{12\cos x-8x\sin x-x^2\cos x}=-\frac{1}{6}.$$

Asymptoty v nekonečne

Budeme sa zaoberať funkciou, ktorá je definovaná na niektorom neohraničenom intervale. Kvôli konkrétnosti sa venujeme intervalu (a, ∞). Situácia v okolí $-\infty$ je analogická.

Pýtame sa na správanie funkcie f, ak jej premenná x rastie do ∞. Konkrétne sa budeme pýtať, či existuje taká priamka $y = kx + q$, že funkcia f sa pre veľké hodnoty x chová približne ako táto priamka. Je to akási „dotyčnica” ku grafu funkcie f v nekonečne.

Ak taká priamka existuje, nazývame ju asymptota v ∞.

Ako príklad môžeme uviesť funkciu $\operatorname{arctg}(x)$, ktorá sa v pre x idúce do nekonečna blíži ku konštante $\frac{\pi}{2}$, a teda jej asymptota v ∞ je priamka $y = 0x + \frac{\pi}{2}$.

Skúsme trochu spresniť naše predstavy o asymptote. Ako prvé očakávame, že funkcia f a jej asymptota majú približne rovnaký smer. Teda chceme aby

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{kx+q} = 1.$$

Po úprave

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{kx+q}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{k}.$$

Teda

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Ďalej chceme, aby sa rozdiel medzi grafom funkcie a asymptotou zmenšoval k nule,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (kx + q) = 0.$$

Teda

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx.$$

Definícia. Nech $f : (a, \infty) \to R$ je funkcia definovaná na intervale (a, ∞).

Ak existujú konečné limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx,$$

tak priamku $y = kx + q$ nazývame asymptota funkcie f v ∞.

Asymptotu v $-\infty$ definujeme analogicky.

Príklad 8. Nájdime asymptotu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$

v nekonečne.

Riešenie.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2-3}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2+x} = 1,$$

a teda $k = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x+1} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3-x^2-x}{x+1} = -1,$$

a teda $q = -1$.

Priamka $y = x - 1$ je asymptota funkcie f v nekonečne.

Príklad 9. Nájdime asymptoty funkcie

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$$

v $\pm\infty$.

Riešenie.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{xe^x}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1,$$

a teda $k = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x+1} = 0,$$

a teda $q = 0$.

Priamka $y = x$ je asymptota funkcie f v nekonečne.

V $-\infty$ je výpočet podobný.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{xe^x}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0,$$

a teda $k = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} - 0x = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0,$$

a teda $q = 0$.

Priamka $y = 0$ je asymptota funkcie f v $-\infty$.