Prednáška 7.

Monotónnosť a lokálne extrémy

Monotónnosť

Je prirodzené očakávať, že ak je smernica dotyčnice kladná, a teda dotyková priamka rastie, tak aj funkcia f je aspoň na malom kúsku okolo bodu dotyku rastúca.

Pojem rastu resp. klesania je intuitívne veľmi jasný, napriek tomu ponúkneme formálnu definíciu.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.

Hovoríme, že funkcia f je na intervale I:

- neklesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$,
- rastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$,
- nerastúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$,
- klesajúca, ak $\forall x_1, x_2 \in I$ platí $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.

Definované pojmy nepotrebujú, aby funkcia f bola diferencovateľná. Ak ale je, vieme dať do súvislosti rast, resp. klesanie funkcie a znamienko derivácie.

Veta (o monotónnosti).

Nech $f : I \to R$ je funkcia diferencovateľná na intervale I.

Potom f je na intervale I:

- *neklesajúca, práve vtedy keď* $\forall x \in I$ *platí* $f'(x) \geq 0$
- *nerastúca, práve vtedy keď* $\forall x \in I$ *platí* $f'(x) \leq 0$

Ak $\forall x \in I$ platí

- $f'(x) > 0$, *tak je funkcia f rastúca*
- $f'(x) < 0$, *tak je funkcia f klesajúca.*

Veta nám umožňuje efektívne určiť intervaly v definičnom obore, na ktorých je funkcia f rastúca a na ktorých klesajúca.

V príkladoch využijeme hlavne jej tretie a štvrté tvrdenie.

Príklad 1. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Riešme rovnicu

$$3x^2 - 3 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. V týchto dvoch bodoch (a v žiadnych iných) je f' rovná nule. Z vlastností spojitých funkcií vieme, že na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$ už funkcia f' nemení svoje znamienko.

Preto stačí zistiť znamienko derivácie v jednom zvolenom bode z každého intervalu. Zrejme $-2 \in (-\infty, -1)$ a $f'(-2) = 9 > 0$,

$0 \in (-1, 1)$ a $f'(0) = -3 < 0$

a $2 \in (1, \infty)$ a $f'(2) = 9 > 0$.

Teda f' je kladná a funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, -1)$, a na $(1, \infty)$.

Tiež f' je záporná a funkcia f je klesajúca na intervale $(-1, 1)$.

Použitím definície monotónnosti a spojitosti funkcie f vieme rozšíriť intervaly rastu a klesania na uzavreté.

Funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, -1]$, a na $[1, \infty)$ a klesajúca na intervale $[-1, 1]$.

Príklad 2. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = e^{-x^2} - xe^{-x^2}2x = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Hľadajme body, v ktorých je derivácia nulová. Riešme rovnicu

$$1 - 2x^2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Opäť vieme, že na intervaloch $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ už funkcia f' nemení svoje znamienko.

Pretože $f'(-2) < 0$, $f'(0) = 1 > 0$ a $f'(2) < 0$.

Funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, a na $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ a rastúca na intervale $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Príklad 3. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2) - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Hľadajme body, v ktorých je derivácia nulová. Riešme rovnicu

$$1 - x^2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Pretože $f'(-2) < 0$, $f'(0) = 1 > 0$ a $f'(2) < 0$.

Funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, -1]$, a na $[1, \infty)$ a rastúca na intervale $[-1, 1]$.

Príklad 4. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x \ln x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R^+ = (0, \infty)$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Derivácia je nulová v bode $x = e^{-1}$.

Pretože $f'(1) = 1 > 0$ a $f'(e^{-2}) = -1 < 0$, je funkcia f klesajúca na intervale $(0, e^{-1}]$, a a rastúca na intervale $[e^{-1}, \infty)$.

Príklad 5. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x^3.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = 3x^2.$$

Derivácia je nulová v bode $x = 0$,

ale všimnime si, že $f'(x) > 0$ aj pre záporné aj pre kladné x.

Teda funkcia je rastúca na $(-\infty, 0]$ a aj na $[0, \infty)$ a teda je rastúca na celom R. (Vieme to overiť aj pomocou definície.)

Lokálne extrémy

Už sme sa stretli s pojmom maximum a minimum funkcie f. Ak spojitá funkcia rastie do bodu x_0 a potom klesá, tak v bode x_0 je najväčšia hodnota funkcie vzhľadom na nejaké okolie bodu x_0. Takejto hodnote budeme hovoriť lokálne maximum.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.

Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0:

- lokálne minimum, ak $\exists O_\delta(x_0)$ také, že $\forall x \in O_\delta(x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$,
- ostré lokálne minimum, ak naviac $\forall x \in O_\delta^\circ(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$.
- lokálne maximum, ak $\exists O_\delta(x_0)$ také, že $\forall x \in O_\delta(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$,
- ostré lokálne maximum, ak naviac $\forall x \in O_\delta^\circ(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$.

V definícii sme nepotrebovali hovoriť o raste ani klesaní.

Ako teda súvisia intervaly monotónnosti a lokálne extrémy? Ak je funkcia diferencovateľná v okolí bodu x_0, vieme použiť nasledujúcu vetu.

Veta (o lokálnych extrémoch). *Nech $f : I \to R$ je funkcia spojitá, na intervale $(a, b) \subset I$ a diferencovateľná na intervaloch (a, x_0), (x_0, b).*

Potom ak

- *$\forall x \in (a, x_0)$ platí $f'(x) > 0$ a súčasne $\forall x \in (x_0, b)$ platí $f'(x) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum,*
- *$\forall x \in (a, x_0)$ platí $f'(x) < 0$ a súčasne $\forall x \in (x_0, b)$ platí $f'(x) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.*

Ak je funkcia diferencovateľná na celom definičnom intervale, tak lokálne extrémy nemôžu byť v iných bodoch, ako v bodoch, kde je derivácia nulová.

Veta (o nutnej podmienke). *Nech $f : I \to R$ je diferencovateľná funkcia.*

Potom ak f má v bode x_0 lokálny extrém tak musí byť $f'(x_0) = 0$.

Definícia. Body x_0, v ktorých je $f'(x_0) = 0$ nazývame stacionárne body.

Veta o nutnej podmienke je dobrý nástroj na hľadanie lokálnych extrémov diferencovateľných funkcií. Lokálne extrémy môžu byť len v stacionárnych bodoch.

Pripomeňme, že stacionárne body sme hľadali aj pri určovaní intervalov monotónnosti. (Aj keď sme ich ešte tak nevolali.)

Príklad 6. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Stacionárne body sú $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Z výsledkov príkladu 1 vieme, že f je rastúca na intervale $(-\infty, -1]$, a na $[1, \infty)$ a klesajúca na intervale $[-1, 1]$.

Preto bod $x_1 = -1$ je bod ostrého lokálneho maxima a $x_2 = 1$ je bodom ostrého lokálneho minima.

Príklad 7. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Stacionárne body sú $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Z výsledkov príkladu 2 vieme, že funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, a na $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ a rastúca na intervale $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Preto bod $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ je bod ostrého lokálneho minima a $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je bodom ostrého lokálneho maxima.

Príklad 8. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Stacionárne body sú $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Z výsledkov príkladu 3 vieme, že funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, -1]$, a na $[1, \infty)$ a rastúca na intervale $[-1, 1]$.

Preto bod $x_1 = -1$ je bod ostrého lokálneho minima a $x_2 = 1$ je bodom ostrého lokálneho maxima.

Príklad 9. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x \ln x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R^+ = (0, \infty)$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Stacionárny bod je $x = e^{-1}$.

Z výsledkov príkladu 4 vieme, že funkcia f je klesajúca na intervale $(0, e^{-1}]$, a a rastúca na intervale $[e^{-1}, \infty)$.

Preto bod $x_1 = e^{-1}$ je bod ostrého lokálneho minima.

Príklad 10. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x^3.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = 3x^2.$$

Derivácia je síce nulová v bode $x = 0$, ale funkcia nemá žiaden lokálny extrém pretože je rastúca aj na intervale $(-\infty, 0]$ aj na intervale $[0, \infty)$ a teda na celom R.

Príklad 11. Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R \setminus \{0, 1\}$.

Derivácia funkcie f je

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x) - (x+1)(2x-1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2}.$$

Derivácia je nulová v bodoch v ktorých je $-x^2 - 2x + 1 = 0$.

Stacionárne body sú $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ a $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

Funkcia f je rastúca na intervale $[-1 - \sqrt{2}, 0)$, a na $(0, -1 + \sqrt{2}]$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$, $[-1 + \sqrt{2}, 1)$ a na $[1, \infty)$.

Funkcia má bod ostrého lokálneho minima $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ a bod ostrého lokálneho maxima $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.