

PREDNÁŠKA 23.

NIEKTORÉ APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

1. Obsah oblasti.

Uvažujeme oblasť A ohraničenú dvoma krivkami, grafmi funkcií $f : [a, b] \rightarrow R$ a $g : [a, b] \rightarrow R$. Budeme predpokladať, že jedna z funkcií je väčšia ako druhá. Nech $f(x) \leq g(x)$ na celom intervale $I = [a, b]$.

Oblasť A je

$$A = \{[x, y]; x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Jej obsah je $p(A)$,

$$p(A) = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Príklad 1. Vypočítajme obsah oblasti ohraničenej nerovnosťami

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq \frac{1}{3}(x-3)^2.$$

Riešenie. Priesečníky kriviek daných rovnosťami namiesto nerovností, sú body $[0, 3]$ a $[3, 0]$. Prvé súradnice priesečníkov určujú interval $[a, b] = [0, 3]$.

Na intervale $[0, 3]$ je funkcia $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$ menšia ako funkcia $g(x) = \sqrt{9-x^2}$. Preto

$$p(A) = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} - \frac{1}{3}(x-3)^2 dx.$$

Pri výpočte integrálu použijeme v prvom sčítanci substitúciu $x = 3 \sin y$.

Funkcia $\varphi(y) = 3 \sin y$ je bijekcia na intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na tomto intervale je funkcia kosínus nezáporná. Inverzná funkcia je $\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{3}$.

Pretože $\arcsin \frac{0}{3} = 0$ a $\arcsin \frac{3}{3} = \frac{\pi}{2}$, dostaneme po substitúcii v prvom sčítanci integrál

$$\begin{aligned} p(A) &= \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx - \int_0^3 \frac{1}{3}(x-3)^2 dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 y} \cdot 3 \cos y dy - \frac{1}{9} [(x-3)^3]_0^3 = \\ &= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy - 3 = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2y}{2} dy - 3 = \\ &= 9 \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 = \frac{9\pi}{4} - 3. \end{aligned}$$

Príklad 2. Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej nerovnosťami

$$y \leq 1 - x^2, \quad y \geq x^2 - 1.$$

Riešenie. Vypočítajte priesečníky kriviek.

Rovnica

$$1 - x^2 = x^2 - 1$$

má dve reálne riešenia $a = -1$ a $b = 1$.

Preto

$$\begin{aligned} p(A) &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) - (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 2 - 2x^2 dx = \\ &= \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2. Objem rotačného telesa.

Uvažujme oblasť ohraničenú na intervale $[a, b]$ nezápornou funkciou f .

Oblasť A je teraz

$$A = \{[x, y]; x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Oblasť A nechajme rotovať okolo osi x . Rotáciou je vyplnené trojrozmerné teleso B . Nebudeme ho formálne popisovať. Vypočítame jeho objem $v(B)$:

$$v(B) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Príklad 3. Vypočítajte objem rotačnej oblasti ohraničenej krivkou

$$f(x) = \sin x \quad x \in [0, \pi].$$

Riešenie.

$$v(B) = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Príklad 4. Vypočítajte objem rotačnej oblasti ohraničenej krivkou

$$f(x) = \cosh x \quad x \in [-1, 1].$$

Riešenie. Funkcia $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$\begin{aligned} v(B) &= \pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x \, dx = \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} dx = \\ &= \pi \left[\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1 = \pi \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{8} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2} - e^2}{8} - \frac{1}{2}(-1) \right) = \\ &= \pi \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{4} + 1 \right). \end{aligned}$$

3. Dĺžka oblúka.

Uvažujeme o hladkej krivke, ktorá je grafom spojite diferencovateľnej funkcie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jej dĺžka je

$$s(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Príklad 5. Vypočítajme dĺžku krivky G_f , ktorá je grafom funkcie

$$f(x) = \cosh x \quad x \in [-1, 1].$$

Riešenie. Deriváciou funkcie $\cosh x$ je funkcia $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$\begin{aligned} s(G_f) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (\sinh(x))^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} \, dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}} \, dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} \, dx = \int_{-1}^1 \cosh x \, dx = \sinh 1 - \sinh(-1) = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Príklad 6. Vypočítajme dĺžku krivky G_f , ktorá je grafom funkcie

$$f(x) = x^2 \quad x \in [0, 1].$$

Riešenie.

$$s(G_f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Na výpočet integrálu použijeme substitúciu

$$x = \frac{\sinh y}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} \cosh y dy.$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + \sinh^2 y} \cdot \frac{1}{2} \cosh y dy.$$

Z identity $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$ dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{y_0} \frac{1}{2} \cosh^2 y dy &= \left[\frac{1}{16} (e^{2y} - e^{-2y}) + \frac{1}{4} y \right]_0^{y_0} = \\ &= \frac{1}{16} (e^{2y_0} - e^{-2y_0}) + \frac{1}{4} y_0. \end{aligned}$$

Nakoniec vypočítajme hodnotu $y_0 = \sinh^{[-1]} 2$.

Pretože

$$\sinh y_0 = \frac{e^{y_0} - e^{-y_0}}{2} = 2,$$

dostaneme pri označení $z = e^{y_0}$ rovnicu

$$z - \frac{1}{z} = 4$$

a z nej

$$z_1 = 2 + \sqrt{5}.$$

Preto je

$$y_0 = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

A teda dĺžka úseku paraboly je

$$\frac{1}{16} (e^{2 \ln(2 + \sqrt{5})} - e^{-2 \ln(2 + \sqrt{5})}) + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

4. Obsah rotačnej plochy.

Uvažujme opäť o rotačnom telese z druhej časti. Tentoraz nepočítame jeho objem, ale veľkosť povrchu jeho rotačnej časti.

K tej dospejeme pomocou vhodných integrálnych súčtov, ktoré nás dovedú ku vzťahu

$$p(B) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Príklad 7. Vypočítajte veľkosť povrchu parabolického reflektora, ktorého tvar je daný funkciou

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1].$$

Riešenie.

$$\begin{aligned} p(B) &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1). \end{aligned}$$