Prednáška 3.

Limita funkcie, pokračovanie

Porovnávanie a limita

Je prirodzené očakávať, že väčšia funkcia má väčšiu limitu. Presnejšie

Veta (o porovnaní).
Nech $f : A \to R$, $h : A \to R$, *pričom* $f(x) \le h(x)$.
Nech existujú limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ *a* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L_2$.

Potom $L_1 \le L_2$.

Táto prirodzená veta má dva užitočné dôsledky.

Veta (o dvoch policajtoch). *Nech* $f : A \to R$, $g : A \to R$, $h : A \to R$, *pričom* $f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Nech existujú limity* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.
Potom aj $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Veta (o vynulovaní ohraničenej). *Nech* $f : A \to R$, $g : A \to R$. *Nech existuje limita* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, *a nech je funkcia* $g(x)$ *ohraničená.*
Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Prečítané ľudskou rečou, prvý dôsledok hovorí, že ak dve funkcie majú rovnakú limitu, tak každá funkcia medzi nimi má tú istú limitu.

Druhý dôsledok hovorí o súčine, ak jeden činiteľ ide k nule a druhý je ohraničený, tak súčin ide tiež k nule.

Príklad 9. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Riešenie.
Argumentáciu urobíme len pre $x > 0$, pre x záporné sa odhady odvodia rovnako.
Najprv využijeme nerovnosť

$$\sin x \le x$$

a z nej dostaneme

$$\frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Na druhej strane

$$x \le \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(táto nerovnosť platí pre } 0 \le x < \frac{\pi}{2}\text{)}$$

a preto

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x}.$$

Spojením odvodených nerovností dostaneme že

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Pretože limity krajných funkcií v nerovnosti sú rovnaké

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad \text{aj} \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

z vety o dvoch policajtoch dostaneme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tento výsledok budeme v ďalších výpočtoch používať bez opakovaného odvodzovania.

Príklad 10. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

V poslednom kroku sme využili, že ak $x \to 0$ tak aj $2x \to 0$. Tento krok bude obsahom všeobecnejšej vety o limite zloženej funkcie.

Príklad 11. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0} \quad x \sin \frac{1}{x}.$$

Riešenie.

Počítame limitu súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna má limitu nula

$$\lim_{x\to 0} x = 0,$$

a druhá

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

je ohraničená. Preto

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(Všimnime si, že samotná funkcia $\sin \dfrac{1}{x}$ v nule nemá limitu. Nakreslite si obrázok vhodným softvérom.)

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech* $f : A \to B$, $g : B \to R$. *Nech*

- *existuje limita* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$,
- *existuje limita* $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$,
- $f(x) \neq y_0$ *na nejakom prstencovom okolí* $O_\delta^\circ(x_0)$.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$.

Príklad 12. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}}.$$

Riešenie.

Počítame limitu zloženej funkcie. Vnútorná zložka je funkcia

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}.$$

Jej limita je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2.$$

Vonkajšia zložka je funkcia

$$g(y) = \sqrt{y}.$$

Teraz pre $y_0 = 2$ je

$$\lim_{y\to 2} \sqrt{y} = \sqrt{2}.$$

Preto

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}} = \sqrt{2}.$$

(Všimnime si, že je splnená aj tretia, technická podmienka, že $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} \neq 2$ v okolí bodu $x = 1$.)

Nevlastná limita

Vo vete o výpočte sme predpokladali, že všetky limity sú vlastné. (Teda čísla.)

V nasledujúcej vete budeme riešiť situáciu, keď jedna z funkcií má limitu ∞, alebo $-\infty$.

Budeme sa zaoberať len prípadom ∞, druhá možnosť sa líši len znamienkom.

Veta (o výpočte pre nevlastnú limitu). *Nech $f : A \to R$, $g : A \to R$. Nech existuje limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*

Potom

- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola, tak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$,*
- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola kladnou konštantou, tak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$,*
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

(Skúste porozmýšľať, prečo požadujeme v prvom prípade ohraničenie zdola a v druhom musí byť ohraničenie zdola kladnou konštantou.)

Príklad 13. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to \infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

Príklad 14. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to 0+} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

Príklad 15. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \operatorname{arctg} x = \infty.$$

Príklad 16. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Príklad 17. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = 0.$$

Príklad 18. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-2x+1}{x^3-3x^2+5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2-2x+1}{x^3-3x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \infty.$$

Príklad 19. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+3x^2-2x+1}{3x^4-3x^2+5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+3x^2-2x+1}{3x^4-3x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(3-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(3-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Úloha. Zamyslite sa a sformulujte všeobecné pravidlo pre počítanie limity podielu dvoch polynómov v ∞.

Ako doplnok uveďme ešte vlastnosť:

Veta. *Nech $f : A \to R$.*
Nech existuje limita $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nech $f(x) > 0$ na nejakom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(x_0)$.

Potom $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Príklad 20. Vypočítajme limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ pre n nepárne} \\ \infty \text{ pre n párne.} \end{cases}$$

(a teda pre nepárne n $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$ neexistuje.)