Prednáška 19.

Typické substitúcie

V starších učebniciach integrálneho počtu môžeme nájsť zoznam substitúcií určených na použitie pri integrovaní funkcií istého tvaru.

Spolu s rozvojom matematického softvéru je táto časť analýzy čoraz menej významná.

Uvedieme len dve jednoduché a často používané substitúcie.

Lineárna substitúcia.

Substitúcia

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ dy &= a\,dx \end{aligned}$$

sa používa pri integrovaní zloženej funkcie s lineárnou vnútornou zložkou

$$\int f(ax+b)\,dx.$$

Použitím substitúcie dostaneme

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\,dy = \frac{1}{a}F(y) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

(V celej kapitole predpokladáme, že funkcia f je integrovateľná a jej primitívna je funkcia F.)

Príklad 1.
Vypočítajme

$$\int \frac{1}{3x+5}\,dx.$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = 3x + 5$$

vedie k riešeniu

$$\int \frac{1}{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + c.$$

Príklad 2.
Vypočítajme

$$\int \sin(1-2x)\,dx.$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = -2x + 1$$

vedie k riešeniu

$$\int \sin(1-2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(1-2x) + c.$$

Príklad 3.
Vypočítajme

$$\int e^{2x}\,dx.$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = 2x$$

vedie k riešeniu

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c.$$

Trigonometrické substitúcie.

Týchto substitúcií je viac, my uvedieme len dve z nich, a to substitúciu

$$\begin{aligned} y &= \sin x, \\ dy &= \cos x\,dx, \end{aligned}$$

ktorá sa používa pri integrovaní

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(\sin x) + c,$$

a substitúciu

$$\begin{aligned} y &= \cos x, \\ dy &= -\sin x\,dx, \end{aligned}$$

ktorá sa používa pri integrovaní

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(y)\,dy = -F(y) + c = -F(\cos x) + c.$$

Príklad 4.
Vypočítajme
$$\int \sin^5 x \cos x \, dx.$$

Riešenie.
$$\int \sin^5 x \cos x \, dx = \int y^5 \, dy = \frac{1}{6} y^6 + c = \frac{1}{6} \sin^6 x + c.$$

Príklad 5.
Vypočítajme
$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx.$$

Riešenie.
$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int (y^4 - y^6) \, dy = \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 + c =$$
$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + c.$$

Substitučná metóda II

Vetu o substitúcii, tak ako ju poznáme z predchádzajúcej prednášky, vieme použiť aj opačným spôsobom. Najprv si pripomeňme jej znenie aspoň formulkou
$$\int f(\varphi(x)) \; \varphi'(x) \, dx = \int f(y) \, dy.$$

V niektorých úlohách nevieme nájsť vnútornú zložku $\varphi(x)$ vo funkcii f ale naopak substitúciou $x = \varphi(y)$ za nezávislú premennú x zjednodušiť integrovanie. Formálne môžeme povedať, že vyššie uvedenú rovnosť obrátime, pričom premenujeme premennú y na x a naopak.

Dostaneme
$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(y)) \; \varphi'(y) \, dy.$$

Tento krok má zmysel, ak pôvodnú funkciu $f(x)$ integrovať nevieme, ale „novú" funkciu $g(y) = f(\varphi(y)) \; \varphi'(y)$ už áno.

Metódu zahrnieme do samostatnej vety.

Veta(o substitučnej metóde II). *Nech $\varphi : I \to J$ je diferencovateľná bijekcia $f : J \to R$ je spojitá funkcia a nech $G : I \to R$ je primitívna funkcia k $f(\varphi(y)) \, \varphi'(y)$. Potom*
$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(y))\varphi'(y) \, dt = G(y) + c = G(\varphi^{-1}(x)) + c$$

Na rozdiel od prvého použitia substitúcie, teraz potrebujeme po skončení integrovania použiť inverznú funkciu φ^{-1}. Preto predpokladáme vo vete jej existenciu.

Príklad 6.

Vypočítajme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Riešenie. S cieľom odstrániť odmocniny, použijeme substitúciu

$$x = y^2,$$
$$dx = 2y\,dy,$$

ktorá vedie k

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{y}{1+y} 2y\,dy.$$

(*Pretože funkcia* $\varphi(y)$ *má byť bijektívna, uvažujeme* $\varphi(y) = y^2$ *len pre* $y \geq 0$.)

A ďalej

$$\int \frac{y}{1+y} 2y\,dy = 2\int y - 1 + \frac{1}{1+y} =$$
$$= y^2 - 2y + 2\ln(1+y) + c = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

V poslednom kroku sme použili inverznú funkciu $y = \sqrt{x}$.

Príklad 7.

Vypočítajme

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$x = y^6,$$
$$dx = 6y^5\,dy,$$

ktorá vedie k

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \int \frac{3+y^3}{y^2-1} 6y^5\,dy = 6\int \frac{y^8+3y^5}{y^2-1}\,dy.$$

Po delení polynómov dostaneme

$$\frac{y^8+3y^5}{y^2-1} = y^6 + y^4 + 3y^3 + y^2 + 3y + 1 + \frac{3y+1}{y^2-1}.$$

Použijeme rozklad na elementárne zlomky a integrujeme

$$6\int y^6+y^4+3y^3+y^2+3y+1+\frac{3y+1}{y^2-1}\,dy = 6\left(\frac{y^7}{7} + \frac{y^5}{5} + \frac{3y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + y + \int \frac{2}{y-1} + \frac{1}{y+1}\,dy\right) =$$

$$= 6\left(\frac{y^7}{7} + \frac{y^5}{5} + \frac{3y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + y + 2\ln|y-1| + \ln|y+1|\right) + c =$$

– použitím inverznej funkcie $y = \sqrt[6]{x}$ –

$$= 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{3x^{\frac{4}{6}}}{4} + \frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} + \frac{3x^{\frac{2}{6}}}{2} + x^{\frac{1}{6}} + 2\ln|x^{\frac{1}{6}} - 1| + \ln|x^{\frac{1}{6}} + 1|\right) + c.$$

Príklad 8.

Vypočítajme

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$x = \sin y,$$
$$dx = \cos y\, dy,$$

na intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, na ktorom je funkcia sinus bijektívna. (Funkcia kosínus je na tomto intervale kladná.)

Táto substitúcia vedie k

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 y} \cos y\, dy = \int \cos^2 y\, dy = \int \frac{1 + \cos 2y}{2}\, dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + c.$$

Inverzná funkcia je $y = \arcsin x$. Preto

$$\frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin 2(\arcsin x)}{4} + c.$$

Tým je integrál vypočítaný. Na úpravu výsledku ešte môžeme použiť identitu

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

ktorá vedie k

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin 2(\arcsin x)}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + c.$$