Prednáška 23.

Niektoré aplikácie určitého integrálu

1. Obsah oblasti.

Uvažujeme oblasť A ohraničenú dvoma krivkami, grafmi funkcií $f : [a, b] \to R$ a $g : [a, b] \to R$. Budeme predpokladať, že jedna z funkcií je väčšia ako druhá. Nech $f(x) \le g(x)$ na celom intervale $I = [a, b]$.

Oblasť A je

$$A = \{[x, y];\ x \in [a, b],\ f(x) \le y \le g(x)\}.$$

Jej obsah je p(A),

$$p(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Príklad 1. Vypočítajme obsah oblasti ohraničenej nerovnosťami

$$x^2 + y^2 \le 9, \qquad y \ge \frac{1}{3}(x-3)^2.$$

Riešenie. Priesečníky kriviek daných rovnosťami namiesto nerovností, sú body $[0, 3]$ a $[3, 0]$. Prvé súradnice priesečníkov určujú interval $[a, b] = [0, 3]$.

Na intervale $[0, 3]$ je funkcia $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$ menšia ako funkcia $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.

Preto

$$p(A) = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} - \frac{1}{3}(x-3)^2\, dx.$$

Pri výpočte integrálu použijeme v prvom sčítanci substitúciu $x = \sin 3y$.

$$p(A) = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx - \int_0^3 \frac{1}{3}(x-3)^2\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 y} \cdot 3\cos y\, dy - \frac{1}{9}\left[(x-3)^3\right]_0^3$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\, dy - 3 = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2y}{2}\, dy - 3 =$$

$$= 9\left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 = \frac{9\pi}{4} - 3.$$

Príklad 2. Vypočítajme obsah oblasti ohraničenej nerovnosťami

$$y \le 1 - x^2, \qquad y \ge x^2 - 1.$$

Riešenie. Vypočítajme priesečníky kriviek.

Rovnica

$$1 - x^2 = x^2 - 1$$

má dve reálne riešenia $a = -1$ a $b = 1$.

Preto

$$p(A) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) - (x^2 - 1)\, dx = \int_{-1}^{1} 2 - 2x^2\, dx =$$

$$= \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

2. Objem rotačného telesa.

Uvažujme oblasť ohraničenú na intervale $[a, b]$ nezápornou funkciou f.

Oblasť A je teraz

$$A = \{[x, y];\ x \in [a, b],\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Oblasť A nechajme zrotovať okolo osi x. Rotáciou je vyplnené trojrozmerné teleso B. Nebudeme ho formálne popisovať. Vypočítame jeho objem $v(B)$.

$$v(B) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Príklad 3. Vypočítajme objem rotačnej oblasti ohraničenej krivkou

$$f(x) = \sin x \qquad x \in [0, \pi].$$

Riešenie.

$$v(B) = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Príklad 4. Vypočítajme objem rotačnej oblasti ohraničenej krivkou

$$f(x) = \cosh x \qquad x \in [-1, 1].$$

Riešenie. Funkcia $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Jej deriváciou je funkcia $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$v(B) = \pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{1}{2} x \right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{8} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2} + e^2}{8} - \frac{1}{2}(-1) \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{4} + 1 \right).$$

3. Dĺžka oblúka.

Uvažujeme o hladkej krivke, ktorá je grafom spojite diferencovateľnej funkcie $f : [a, b] \to R$. Jej dĺžka je

$$s(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Príklad 5. Vypočítajme dĺžku krivky G_f, ktorá je grafom funkcie

$$f(x) = \cosh x \qquad x \in [-1, 1].$$

Riešenie.

$$s(G_f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\sinh(x))^2} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} \, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}} \, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2 x} \, dx = \int_{-1}^{1} \cosh x \, dx = \sinh 1 - \sinh(-1) = e - \frac{1}{e}.$$

Príklad 6. Vypočítajme dĺžku krivky G_f, ktorá je grafom funkcie

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [0, 1].$$

Riešenie.
$$s(G_f) = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Na výpočet integrálu použijeme substitúciu
$$x = \frac{\sinh y}{2}, \qquad dx = \frac{1}{2}\cosh y\,dy.$$
$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^{y_0} \sqrt{1+\sinh^2 y} \cdot \frac{1}{2}\cosh y\,dy.$$

Z identity $1+\sinh^2 y = \cosh^2 y$ dostaneme
$$\int_0^{y_0} \frac{1}{2}\cosh^2 y\,dy = \left[\frac{1}{8}(e^{2y}-e^{-2y}) + \frac{1}{2}y\right]_0^{y_0} =$$
$$= \frac{1}{8}(e^{2y_0}-e^{-2y_0}) + \frac{1}{2}y_0.$$

Nakoniec vypočítajme hodnotu $y_0 = \sinh^{[-1]} 2$.
Pretože
$$\sinh y_0 = \frac{e^{y_0}-e^{-y_0}}{2} = 2,$$
dostaneme pri označení $z = e^{y_0}$ rovnicu
$$z - \frac{1}{z} = 4$$
a z nej
$$z_1 = 2+\sqrt{5}.$$

Preto je
$$y_0 = \ln(2+\sqrt{5}).$$

A teda dĺžka úseku pareboly je
$$\frac{1}{8}(e^{2\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-2\ln(2+\sqrt{5})}) + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$$

4. Obsah rotačnej plochy.

Uvažujme opäťo rotačnom telese z druhej časti. Tentoraz nepočítame jeho objem, ale veľkosť rotačnej časti jeho povrchu.

K tej dospejeme pomocou vhodných integrálnych súčtov, ktoré nás dovedú ku vzťahu
$$p(B) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Príklad 7. Vypočítajme veľkosť povrchu parabolického reflektora, ktorého tvar je daný funkciou

$$f(x) = \sqrt{x} \in [0, 1].$$

Riešenie.

$$p(B) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1).$$